

Turbulente Kanal- und Grenzschichtströmungen

Werner Albring

Neufassung des Kapitels Turbulente reibungsbehaftete Strömungen
im Lehrbuch „Angewandte Strömungslehre“

2004

Inhaltsverzeichnis

1	Begriffsbildung und Historie	1
2	Ludwig Prandtls Pionierarbeit	4
3	Berechnung der Turbulenz mit strukturierten Wirbelfeldern	7
4	Das Beschreiben von Reibungsschichten mit Kompaktprofilen	8
5	Die spezialisierte strömungsmechanische Gleichung einer unbeschleunigten Grundströmung	9
6	Das Zweiparabel-Profil	12
7	Bei Turbulenz mindern parasitäre Wirbel die fluide Transportarbeit gegenüber der laminaren Strömung	15
8	Die Verbindung von Geschwindigkeitsanstieg an der Wand und Re-Zahl bei einer Kanalströmung	17
9	Beziehung zwischen Geschwindigkeitsanstieg an der Wand und Widerstandsbeiwert	18
10	Über den Zusammenhang von Geschwindigkeitsanstieg an der Wand und Reynoldszahl in Grenzschichten	18
	Beispiele	20
11	Die Hagenzahl einer Kanalströmung	21
12	Das Umformen von Geschwindigkeitsprofilen einer Kanalströmung in ein Grenzschichtprofil	21
13	Entwicklung von Dreischichtenprofilen	22
14	Das Dreischichtenprofil für die Kanalströmung	24
15	Geschwindigkeitsprofil in ebenen turbulenten Grenzschichten	26
16	Das Ablöseproblem	29

1 Begriffsbildung und Historie

Was bedeutet das Wort Turbulenz? Während langer Zeiten haben auch kompetente Fachleute der Strömungsmechanik keine tief gegründete physikalische Definition formuliert. Noch im Jahr 1959 beklagte der Niederländer O. HINZE in seinem damals publizierten Turbulenz-Buch, dass sich in der Vergangenheit die bedeutendsten Kenner turbulenter Strömungen nicht bemüht hatten, den Elementarprozess der Turbulenz zu definieren, nur von zeitlich unregelmäßigen Strömungen war geschrieben worden.

Also zeigte sich wieder einmal, dass Unbekanntes eher benannt als ergründet wird, ganz so wie Goethe es den Mephisto im Drama hat sprechen lassen:

*Man soll sich nicht zu ängstlich quälen,
denn eben wo Begriffe fehlen,
da stellt sogleich ein Wort sich ein.*

Im Wörterbuch findet man für das Adjektiv turbulent folgende Erklärung: „*Durch allgemeine Aufregung, Erregung, wildes Durcheinander gekennzeichneter Zustand.*“ Das Substantiv Turbulenz ist in der deutschen Sprache seit dem 17. Jahrhundert nachgewiesen, es ist hergeleitet aus dem lateinischen Eigenschaftswort *turbulentus*, es bedeutet: unruhig, bewegt, stürmisch, sowie aus dem Hauptwort *turbo*, es bezeichnet Wirbel, Sturm und Kreisel. Journalisten verwenden das Wort Turbulenz im Plural, sie sprechen von Turbulenzen, um ein chaotisches Durcheinander zu benennen.

Der Strömungsmechaniker jedoch gebraucht das Wort nur im Singular, damit benennt er eine Strömung mit einer Vielzahl von Wirbeln.

Und die tiefer dringende Frage der Fachleute heißt: Wie kommt in der Natur und bei technischen Geräten dieser Strömungstyp zu Stande, der höheren Widerstand und größere Verluste gegenüber einer auch möglichen wirbelfreien laminar, geschichteten Strömung bewirkt?

Auf die Frage: Welche Auswirkungen hat die Turbulenz, wie beeinflusst sie die natürliche Umgebung kann man antworten:

Gäbe es in der Natur kein turbulentes, die kinetische Energie eines Hauptstromes milderndes Verwirbeln, dann sähe unsere Umgebung anders aus:

Die Geschwindigkeit eines Baches oder Flusses würde bei gleichem geodätischen Gefälle um ein Vielfaches größer sein.

Der Wetterablauf würde beeinflusst. So könnten, bei gleicher Druckdifferenz zwischen Hoch- und Tiefdruckgebiet, ohne Turbulenz, ganz entsetzliche und sehr lange andauernde Orkane mit außerordentlich großen, nie erlebten Windgeschwindigkeiten wüten.

Jedoch würde bei Laminarität die den Boden, also auch den Grund von Bach und Fluss, erodierende Schubspannung, trotz gesteigerter Geschwindigkeit, nicht größer sein als beim Wirken von Turbulenz.

Doch zu aller Beruhigung, derartig vollständiges Verschwinden turbulenter Wirbel stellt sich in der Natur nicht ein.

Und welchen Anteil nimmt die Mathematik beim forschenden Erkunden, beim Prozess des gedanklichen Durchdringens, des Erklärens und Definierens?

Grundsätzlich gilt: Erst wenn ein physikalisch begründeter Ansatz für einen elementaren Vorgang im differentiell Kleinen bekannt ist, kann die Mathematik sinnvoll eingesetzt werden. Mit einer Integration kann Aufschluss über das Strömungsverhalten in Raum und Zeit gewonnen werden.

Frühe Kunde von experimentellen Untersuchungen turbulenter Strömungen haben wir von französischen Bauingenieuren erhalten, die um die Zeit der französischen Revolution von 1789 lebten. [1] Sie hatten den Reibungswiderstand von Rohren, die zur städtischen Wasserversorgung dienen, gemessen, mit dem Ziel, die notwendige Pumpenleistung vorauszuberechnen. DUBENIAT bemerkte 1786, dass der Widerstand nicht genau proportional zum Geschwindigkeitsquadrat verläuft, und 1791 präziserte WOLTMANN, dass der Widerstand der Geschwindigkeitspotenz $7/4$ folgt.

Der deutsche Bauingenieur GOTTHILF HAGEN (1797 bis 1884) entdeckte die unterschiedlichen Strömungsformen laminar und turbulent. HAGEN hat im Jahr 1839, vier Jahre vor POISEUILLE, die Größe des Druckabfalls für laminare Strömung in Rohren publiziert, und er hat schon im Jahr 1841, beim Experimentieren mit modellmäßig verkleinerten Rohren, eine Grenze von Geschwindigkeit und Durchmesser entdeckt, unterhalb der das Wasser laminar, oberhalb aber turbulent strömt. Er hatte der Flüssigkeit feine Sägespäne zugesetzt und wandparalleles Strömen bei Laminarität sowie starkes Verwirbeln bei Turbulenz beobachtet.

Das alles geschah schon mehr als 40 Jahre vor den Experimenten des englischen Hochschullehrers OSBORNE REYNOLDS, dem wahrscheinlich HAGENS Publikation nicht bekannt gewesen war. Hingegen hatte sich die Nachricht von den Versuchen REYNOLDS weit und schnell verbreitet. Auch er hatte mit von Wasser durchströmten Glasrohren experimentiert und gezeigt, dass ein flüssiger Farbfaden bei Laminarität auf langem Weg erhalten bleibt, dass er sich hingegen bei Turbulenz auf kurzem Weg schnell mit dem umgebenden Wasser mischt.

REYNOLDS besondere Leistung besteht im Entdecken der Ähnlichkeitskennzahl für die Grenze von laminar und turbulent, gebildet aus dem Produkt von Geschwindigkeit und Rohrdurchmesser, dividiert durch die kinematische Zähigkeit des Fluids, später kritische Reynoldszahl genannt. Die Benennung Reynoldszahl hat ARNOLD SOMMERFELD vorgeschlagen.

Zu Beginn des 20. Jahrhunderts, hatten sich neben den Interessenten aus dem Wasserbau auch Ingenieure des Schiffbaus und der Luftfahrt bei den Strömungsmechanikern gemeldet. Sie wollten Methoden kennen lernen, um die von der Strömung verursachten Kräfte und Momente, besonders den Reibungswiderstand an Schiffen, Luftschiffen und von Flugzeugen, vorzuberechnen.

Viele dieser Problemstellungen löste der genial begabte LUDWIG PRANDTL (1875 - 1953), der schon von seinen Zeitgenossen als Vater der Strömungslehre benannt worden war.

Um den Reibungswiderstand voraus zu berechnen, mussten die Strömungsmechaniker Geschwindigkeitsprofile in der körpernahen Reibungsschicht, Grenzschicht genannt, ermitteln. Pionierarbeit zur laminaren Grenzschicht leisteten PRANDTL (1904) und sein Doktorand BLASIUS, an der Universität Göttingen.

Später (1913) hat BLASIUS in der Berliner Wasserbauversuchsanstalt den turbulenten Widerstandsbeiwert von mit Wasser durchströmten Rohren, in Abhängigkeit von der Reynoldszahl gemessen [2]. Er hat auch festgestellt, dass der Druck proportional zur Potenz $7/4$ abfällt. Das ist übereinstimmend mit dem 122 Jahre zuvor erbrachten Ergebnis von WOLTMANN, dessen Publikation BLASIUS vermutlich nicht kannte. Die Messungen von BLASIUS sind für das gesamte Fachgebiet der Strömungsmechanik im 20. Jahrhundert wichtig geblieben, denn sein Resultat hat sich auf Grenzschichten umrechnen lassen.

Außerhalb des Göttinger Arbeitskreises um Prandtl, hatten der schwedische Meteorologe C. W. OSEEN [3], sowie der Deutsche L. HOPF [4] und [5], bemerkenswerte Beiträge zum Turbulenzproblem geliefert.

Nun zur Geschichte der Berechnung von turbulenten Geschwindigkeitsprofilen im Kanal und in Grenzschichten.

PRANDTL griff den Vorschlag des französischen Forschers BOUSSINESQ auf, eine vergrößerte Zähigkeit zu postulieren. Er überlegte: Die kinematische Wirbelzähigkeit besitzt die Dimension $[m^2/s]$. Sie kann als Produkt einer Mischgeschwindigkeit und einer Mischungslänge aufgefasst werden. PRANDTL setzte für die Mischgeschwindigkeit das Produkt von Geschwindigkeitsanstieg und Wegelement an.

Die Mischungslänge interpretierte Prandtl als Länge des Weges, auf dem sich ein Teilchen mit der Umgebung vermischt.

Das Einsetzen dieser Zähigkeit in Newtons Reibungsformel führt zu einer Verbindung von Schubspannung und Geschwindigkeitsanstieg.

In welcher Beziehung die Mischungslänge zu anderen Strömungsparametern steht, blieb unbekannt. Diesen Erkenntnisstand hatte PRANDTL 1925 erreicht. [6]

Erst fünf Jahre später glaubte Prandtls früherer Mitarbeiter THEODOR V. KARMAN eine Lösung gefunden zu haben. [7] Er setzte die Mischungslänge proportional zum Quotienten aus erster und zweiter Geschwindigkeitsableitung nach der Koordinate senkrecht zur Wand. Das Integral führt zu einer Geschwindigkeit, die vom Logarithmus des Wandabstandes abhängt. Brauchbar war diese Lösung jedoch nur im wandfernen Gebiet. Sie versagte in unmittelbarer Wandnähe. Deshalb wurde dort eine besondere laminare Unterschicht angestückelt. V. KARMAN trug sein Ergebnis auf den internationalen Mechanik Kongress in Stockholm vor.

PRANDTL [8] publizierte drei Jahre nach KARMANS Vortrag eine stark vereinfachte Integration. Er setzt für die in Wirklichkeit vom Wandabstand abhängende Schubspannung, einen konstanten mittleren Wert an. Die Mischungslänge ändert sich proportional zum Wandabstand. Das Integral ergibt ebenfalls eine logarithmische Abhängigkeit der Geschwindigkeit vom Wandabstand. Auch diese Gleichung versagt in unmittelbarer Wandnähe. Wieder muss eine laminare Unterschicht hinzugefügt werden.

Als Gebrauchsformel hat sich PRANDTL'S Gleichung für das zeitgemittelte turbulente Geschwindigkeitsprofil einer turbulenten Grenzschicht während des ganzen restlichen 20. Jahrhunderts erhalten, sie genügte allen

technischen Anwendern, sie wurde unverändert den Studierenden der Strömungsmechanik vorgetragen.

Doch die Frage nach dem elementaren Ablaufen der Turbulenz blieb ein Thema der strömungsmechanischen Forschung, denn noch fehlten physikalisch begründete Ansätze. PRANDTL hatte bereits in einer Schrift aus dem Jahr 1921 beklagt, dass die Physiker das Turbulenzproblem stiefmütterlich behandeln.

Zwar hatte sich in der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts auch der bedeutende Physiker ARNOLD SOMMERFELD der Aufgabe gestellt. Er bewertete in einem Buch (1944) die Turbulenzforschung als das schwierigste Problem der Strömungsmechanik. Zu dieser Zeit war noch umstritten, ob die Navier-Stokes-Gleichung zum Errechnen zuständig sei. SOMMERFELD erklärte sich zwar von der Zuständigkeit überzeugt, er schrieb aber, dass hervorragende Fachvertreter wie v.KARMAN und TAYLOR sein Einschätzen für falsch hielten. Sie vermuteten, dass der Turbulenz nicht mit Differentialgleichungen, sondern nur mit der Statistik beizukommen sei, ähnlich wie es schon bei der Gastheorie geschehen war.

Diese Meinung teilte noch in der zweiten Hälfte des zwanzigsten Jahrhunderts die Majorität der Strömungsmechaniker. Auch muss man bedenken, dass etwa bis zur Jahrhundertmitte nur Integrale von Naviers und Prandtls Differentialgleichungen für laminares Strömen gelöst werden konnten.

Heute wird die Zuständigkeit von Naviers Gleichung für die Turbulenz nicht mehr bezweifelt. Dazu trugen nicht zuletzt die Computer gestützte Integration der Navier-Stokes-Gleichung für turbulente Strömungen bei. Am Institut für Angewandte Strömungslehre der TU Dresden war das Problem durch J. STILLER bearbeitet worden. [13]

In Dresden wurden die Elementarbewegungen von Wirbeln untersucht [15]. Aus dem Verhalten überlagerter Wirbelfelder konnte ein Turbulenzkriterium formuliert werden. (Siehe Seite 7)

Weiterhin hat sich der Verfasser mit der Entwicklung turbulenter Geschwindigkeitsprofile beschäftigt. Im nachfolgenden Text wird über Ergebnisse berichtet.

2 Ludwig Prandtls Pionierarbeit

Zum Errechnen turbulenter Reibungsschichten war PRANDTL von Newtons Reibungsgesetz ausgegangen. Die Schubspannung τ entspricht dem Produkt aus dem Geschwindigkeitsgradienten senkrecht zur Strömungsrichtung und der fluiden Zähigkeit.

$$\begin{aligned}\tau &= \nu\rho \frac{dc_x}{dy} = \nu\rho \frac{dC}{dY} \cdot \frac{c_{\max}}{h} \\ \tau_W &= \nu\rho \cdot C'_0 \cdot \frac{c_{\max}}{h}\end{aligned}\tag{1}$$

Die Größe C'_0 steht für den dimensionslosen Anstieg der Geschwindigkeit an der Wand.

$$C'_0 = \left[\frac{dC}{dY} \right]_{Y=0}$$

Mit der Reynoldszahl

$$\text{Re} = \frac{c_{\text{mittel}} \cdot 4h}{\nu}$$

wird die Gleichung (1) wird zu einem dimensionslosen Ausdruck umgeformt.

$$\frac{\tau}{\rho \cdot c_{\text{mittel}}^2} = \frac{4}{\text{Re}} \cdot \frac{c_{\max}}{c_{\text{mittel}}} \cdot \frac{dC}{dY}\tag{2}$$

Als dimensionslose Wandschubspannung ist (3) geschrieben.

$$\frac{\tau_W}{\rho \cdot c_{\text{mittel}}^2} = \frac{4}{\text{Re}} \cdot \frac{c_{\text{max}}}{c_{\text{mittel}}} \cdot C'_0. \quad (3)$$

Aus (2) und (3) bildet man das Schubspannungsverhältnis.

$$\frac{\tau}{\tau_W} = \frac{1}{C'_0} \cdot \frac{dC}{dY} \quad (4)$$

Für turbulente Strömungen ersetzte PRANDTL – nach einem Vorschlag von BOUSSINESQ – die kinematische Zähigkeit ν durch eine größere effektive Zähigkeit ν_e , die er als Produkt aus zwei hypothetischen Größen, Mischungsweg und Mischgeschwindigkeit, auffasste.

Er nannte sie Wirbelzähigkeit und schrieb

$$\nu_e \sim y^2 \cdot \frac{dc_x}{dy} \quad (5)$$

Diesen Ausdruck setzte er in (1) ein, und erhielt

$$\frac{\tau}{\rho} = K \cdot y^2 \left(\frac{dc_x}{dy} \right)^2 \quad (6)$$

Darin ist K ein Proportionalitätsfaktor. Weiterhin ließ PRANDTL im gesamten Bereich der Koordinate y , also in Richtung quer zur Strömung, die Schubspannung konstant. Er ersetzte die tatsächliche Abhängigkeit von y durch einen Festwert. Damit wurde (6) leicht integrierbar.

$$\frac{c_x}{\sqrt{\tau_W/\rho}} = \frac{1}{\sqrt{K}} \cdot \ln \frac{y\sqrt{\tau_W/\rho}}{\nu} + \text{konst.} \quad (7)$$

Den Wert $1/\sqrt{K}$ setzte er gleich 2,5 und die Integrationskonstante gleich 5,5. Beides als Anpassung an Messungen.

Aus (7) lassen sich Einschränkungen des Gültigkeitsbereiches erkennen: Ausgeschlossen werden muss das wandnahe Gebiet um $y = 0$. Es wird durch eine laminare Unterschicht ersetzt.

$$\frac{c_x}{\sqrt{\tau_W/\rho}} = \frac{y\sqrt{\tau_W/\rho}}{\nu} \quad (8)$$

Mit den Gleichungen (8) und (3) lässt sich, für den später in [14] eingeführten dimensionslosen Geschwindigkeitsanstieg an der Wand, die folgende Gleichung schreiben.

$$C'_0 = \frac{h\sqrt{\tau_W/\rho}}{\nu} \cdot \frac{\sqrt{\tau_W/\rho}}{c_x} \quad (9)$$

Im Anfang der Turbulenzforschung hatte PRANDTL die Gleichung

$$C = Y^{1/7} \quad (10)$$

als ein durch Auswerten und Umrechnen der Messungen von BLASIUS gefundenes Geschwindigkeitsprofil benutzt, das s.g. Ein-Siebentel-Potenz-Profil. [6]

Dieses Profil verletzt jedoch wesentliche Randbedingungen. Bei $y = 0$ wird der Geschwindigkeitsanstieg unendlich groß und bei $y = 1$ wird er nicht Null, sondern erreicht den Wert $1/7$.

Dennoch gelang es PRANDTL, mit dem Auftragen der Funktion

$$\frac{c_x}{\sqrt{\tau/\rho}} = f\left(\ln \frac{y\sqrt{\tau_W/\rho}}{\nu}\right),$$

ein weitreichend anwendbares Diagramm zu schaffen, das in der Ingenieurpraxis sowohl für die Kanalströmung als auch für die Grenzschichten benutzt wurde. (Abbildung 1)

Auf der Ordinate, zwischen den Zahlenwerten 70 und 10^3 , liegt das von PRANDTL so benannte Gebiet der

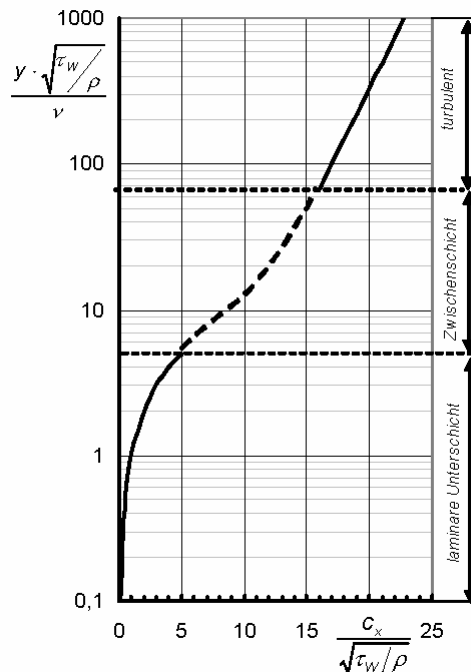


Abb. 1 Prandtl's weitreichend anwendbares Geschwindigkeitsprofil mit turbulentem und laminarem Gebiet (kräftig gezeichnet), beide Einzel- Profile sind durch die gestrichelt gezeichnete Übergangsschicht verbunden.

voll ausgebildeten Turbulenz.

Aus PRANDTL'S Ergebnis lassen sich einige Gebrauchsformeln herleiten.

Die Gleichung (9) ist der Quotient von $c_x/\sqrt{\tau_W/\rho}$ und zugehörigem $(h\sqrt{\tau_W/\rho})/\nu$. Das sind die Endkoordinaten eines Geschwindigkeitsprofils für $y = h$ in Prandtl's Darstellung von Gleichung (7). Der Quotient entspricht C'_0 , dem dimensionslosen Anstieg der Geschwindigkeit an der Wand bei $y = 0$.

Weiterhin kann man aus dem Produkt der End- Koordinatenwerten eine Reynoldszahl und, nach Multiplikation mit dem Faktor 4 (um den Bedingungen der Ähnlichkeitsmechanik zu genügen) eine spezielle Reynoldszahl errechnen, die auf die maximale Geschwindigkeit des Profils bezogen ist. In [Abbildung 2](#) wurden diese Re-Zahl, sowie der Anstieg der Geschwindigkeit an der Wand C'_0 , über der Prandtl'schen Geschwindigkeitskoordinate aufgetragen.

Weitere Folgerungen aus Prandtl's Profil. Das nach (7) und (8) errechnete Profil erfüllt jedoch nur wenige der Randbedingungen, die an ein Geschwindigkeitsprofil einer Grenzschicht gestellt werden, nämlich

bei $y = 0$ werden $c_x = 0$ und $\frac{dc_x}{dy} = C'_0 \frac{c_{x,max}}{h}$,

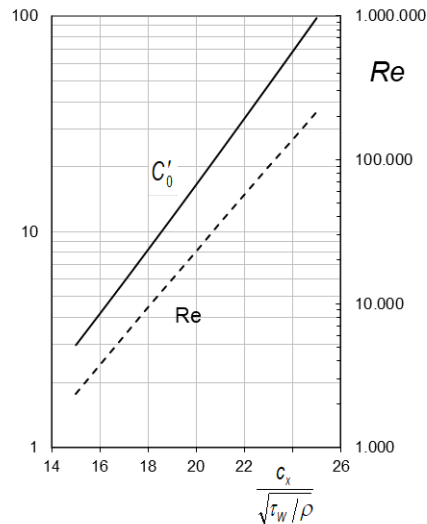


Abb. 2 Re-Zahl sowie der Anstieg der Geschwindigkeit an der Wand C'_0 , über der Prandtlschen Geschwindigkeitskoordinate

bei $y = h$ gilt $c_x = c_{\max}$.

Das Profil verletzt die Bedingung, dass in Kanalmitte oder am oberen Grenzschichttrand der Geschwindigkeitsanstieg Null betragen sollte.

3 Berechnung der Turbulenz mit strukturierten Wirbelfeldern

Beim Berechnen turbulenter Strömungen mit statistischen Methoden verzichtet man darauf, die Kausalität vom elementar kleinen Wirbel bis weiter zur Bildung eines Geschwindigkeitsprofils im Hauptstrom zu berechnen. Gerade das aber war ab den 1970-iger Jahren eine Zielstellung der Forschung am Institut für Angewandte Strömungslehre der TU Dresden. Die dabei bis zum Jahr 1979 erreichte Ergebnisse sind in einer Monographie [15] nachzulesen.

Dabei wurde der örtliche und zeitliche Geschwindigkeitsverlauf in Wirbelfeldern als exakte Lösung von NAVIERS Gleichung berechnet. Innerhalb von Systemen kleiner und kleinster Wirbel wird, wegen großer Geschwindigkeitsgradienten, der Arbeitsverbrauch durch Reibung besonders groß.

Als Antwort auf Einwände, das Arbeiten mit strukturierten Wirbelfeldern könne als Ergebnis der Rechnung nur laminare Lösungen liefern, wurde ein mathematisch scharf selektierendes Turbulenzkriterium gefunden. [15] Es lautet:

Turbulenz ist in Wirbelsystemen vorhanden, wenn in der Differentialgleichung von Rayleigh, bei periodischer Bewegung, in zeitlicher Mittelbildung der nichtlineare Summand aus der Wirbelbewegung erhalten bleibt.

Wenn Stromlinien und Linien gleicher Drehung in überlagerten elementaren Wirbelfeldern deckungsgleich sind, fließt eine Strömung laminar.

Ist das nicht der Fall, dann können überlagerte Felder im zeitlichen Mittel beständig bleiben, Energie fließt ihnen von der Hauptströmung zu, es herrscht Turbulenz.

Die starken Geschwindigkeitsgradienten innerhalb von Wirbelfeldern verursachen Reibung. Damit verbunden ist der Verbrauch eines Großteils der verfügbaren Energie. Der verbleibende Energieanteil für den Transport des Hauptstroms im Kanal wird erheblich gemindert.

Zum Berechnen teilt man die Strömung in einen zeitbeständigen Anteil, für ihn ist die RAYLEIGH Differentialgleichung zuständig, und in einen zeitveränderlichen Anteil, der mit einer nichtlinearen SOMMERFELD Gleichung bearbeitet wird. [15]

In der Rayleigh-Gleichung erscheint ein zusätzliches Trägheitsglied, und die nichtlineare Sommerfeld Gleichung spaltet Wirbelsysteme in weitere Systeme auf. In keiner der Differentialgleichungen darf der Reibungssummand gestrichen werden. Die Rechnung liefert ein Spektrum von Wirbelfeldern mit größeren und kleineren Wellenzahlen von geringerer Intensität als die Ausgangsfelder.

Das Wirbelsystem ist vergleichbar mit einem System von akustischen Kombinationstönen, das HELMHOLTZ beschrieben hat.

An der TU Dresden arbeitete E. STREHLE mit laminaren Wirbelfelder. [10] Zum Errechnen zeitgemittelter Geschwindigkeitsprofile wird das Zeitmittel des Verwirbelns gebildet.

G. SCHINDLER nutzte ein neues Verfahren. Ausgehend von Wirbelsystemen errechnete er das turbulente Geschwindigkeitsprofil für die Kanalströmung [11].

Die Brüder FRITZ DETSCH und FRANZ DETSCH wandten die Wirbelfelder auf akustische Problemstellungen an. [12] Mit Wirbelfeldern als akustisches Quellgebiet errechneten sie strömungsmechanisch alle akustischen Singularitäten, die der Engländer LIGHTHILL in Analogie zur Elektrodynamik nur postuliert hatte.

Im Dresdener Institut hatte eine von H. J. MASCHEK geführte Arbeitsgruppe die Fortschritte der Statistiker beim Bearbeiten des Turbulenzproblems verfolgt und dazu eigene Beiträge geleistet. Maschek war einer der ersten, der Computerprogramme zur Berechnung turbulenter Strömungen erarbeitete.

Ende der neunziger Jahre hatte sich der Verfasser dem Berechnen turbulenter Geschwindigkeitsprofile einer Kanalströmung zugewandt. Zunächst, um noch auf dem von BOUSSINESQ gewiesenen Weg, nach einer vom Wandabstand abhängenden Zähigkeitsfunktion zu suchen.

Prandtl war bei der Berechnung des turbulenten Geschwindigkeitsprofils vom Newtonschen Reibungsgesetz ausgegangen. Dagegen wurde nunmehr die Differentialgleichung für das Kraftgleichgewicht verwendet. [16]

Als erstes Ergebnis wurde ein Kompaktprofil vorgestellt. [17] Das ist ein Geschwindigkeitsprofil, das schon im gesamten Strömungsbereich zwischen $Y = 0$ und $Y = 1$ gilt. Die Randbedingungen wurden erfüllt, ohne eine laminare Unterschicht in Wandnähe hinzuzufügen zu müssen.

In einem weiteren Schritt wurde das Zweiparabel-Profil entwickelt.

In [20] wurde schließlich ein Dreischichten-Profil vorgestellt, das auch die Randbedingungen beim Beschleunigen und Verzögern berücksichtigt.

4 Das Beschreiben von Reibungsschichten mit Kompaktprofilen

Zum Berechnen des Verlaufes eines zeitgemittelten Hauptgeschwindigkeitsprofils turbulenter Strömungen wird nicht primär von Newtons Reibungsgesetz ausgegangen, sondern es wird mit der strömungsmechanischen Differentialgleichung operiert.

In Folgendem wird die strömungsmechanische Gleichung für eine unbeschleunigte Parallelströmung hergeleitet. Daraus werden Geschwindigkeitsprofile berechnet. Weiterhin wird eine Rechnung vorgestellt, die den Energieverbrauch durch Wirbel mit dem Verändern des Geschwindigkeitsprofils von Laminarität zur Turbulenz verbindet.

5 Die spezialisierte strömungsmechanische Gleichung einer unbeschleunigten Grundströmung

Bei der ebenen Strömung zwischen zwei parallelen, geraden Wänden, Kanalströmung genannt, wird der Beschleunigungssummand aus NAVIERS Gleichung gestrichen. Es bleibt die Gleichung (11)

$$-\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu_e \cdot \frac{\partial c_x}{\partial y} \right) \quad (11)$$

das Gleichgewicht zwischen Druck- und Reibungskraft anzeigend.

Das negative Vorzeichen von $\partial p / \partial x$ berücksichtigt den Druckabfall in Strömungsrichtung. In unmittelbarer Wandnähe wird die im Außenfeld vergrößerte Zähigkeit ν_e zum Normalwert zurückgebildet, es gilt dort also $\nu_e = \nu$. Man schreibt für die Kanalströmung im Wandbereich

$$-\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} = \nu \cdot \frac{\partial^2 c_x}{\partial y^2} \quad (12)$$

und, nach weiterem Differenzieren .

$$\frac{\partial^3 c_x}{\partial y^3} = 0. \quad (13)$$

Mit der Hagenzahl

$$\text{Ha}^* = - \left(\frac{h^2 \cdot \partial p / \partial x}{c_{\text{mittel}} \cdot \nu \cdot \rho} \right)_{(Y=0)} \quad (14)$$

wird aus (12) der Zusammenhang (15)

$$\text{Ha}^* = - \left(\frac{\partial^2 C}{\partial Y^2} \right)_{(Y=0)} \quad (15)$$

gefolgert, das Charakteristikum einer Kanalströmung.

Folgende dimensionslose Größen werden definiert:

$$C = \frac{c_x}{c_{x\text{max}}}, \quad Y = \frac{y}{h}, \quad C'_0 = \left(\frac{dC}{dY} \right)_{Y=0}. \quad (16)$$

Das Integrieren von (11) führt zu .

$$-\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \cdot y = \nu_e \cdot \frac{\partial c_x}{\partial y} + \text{konst.} \quad (17)$$

An der Wand, bei $y = 0$, geht also ν_e in ν über. Daraus lässt sich für die Größe der Konstanten folgern.

$$\text{konst.} = -\nu \cdot \left(\frac{dc_x}{dy} \right)_{y=0}. \quad (18)$$

Nach dem Impulssatz kann man für die linke Seite der Gleichung (17) auch schreiben:

$$-\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{-\tau_W}{\rho \cdot h} = \frac{\nu \cdot \left(\frac{dc_x}{dy} \right)_{y=0}}{h} = \frac{\nu \cdot c_{x\max}}{h^2} \cdot C'_0. \quad (19)$$

Das in (17) und (18) eingesetzt ergibt

$$-\nu \cdot C'_0 \cdot \frac{c_{x\max} \cdot Y}{h^2} = \nu_e \cdot \frac{dC}{dY} \cdot \frac{c_{x\max}}{h} - C'_0 \cdot \frac{c_{x\max}}{h}, \quad (19a)$$

und schließlich

$$-C'_0 \cdot Y = \frac{\nu_e}{\nu} \cdot \frac{dC}{dY} - C'_0. \quad (20)$$

Etwas anders geordnet erhält man

$$\boxed{\frac{1}{C'_0} \cdot \frac{dC}{dY} = \frac{1-Y}{\nu_e/\nu}} \quad (21)$$

Das ist die strömungsmechanische Gleichung einer unbeschleunigten Parallelströmung.

Die Gleichung (21) ist die Grundlage zum Errechnen von Geschwindigkeitsprofilen $C = f(Y)$ in Kanalströmungen. Sie wird aber auch für Grenzschichten angewendet, wenn die Vergrößerung der Grenzschichtdicke in Strömungsrichtung gering ist.

Für das Verhältnis von effektiver Zähigkeit zur molekularen Zähigkeit wird der folgende Ansatz gewählt.

$$\frac{\nu_e}{\nu} = 1 + a \left(Y - \frac{Y^2}{2} \right) \quad (22)$$

Die Zähigkeit an der Wand, bei $Y = 0$, entspricht der molekularen Zähigkeit. ($\nu_e/\nu = 1$) In der Kanalmitte, bei $Y = 1$ erreicht Verhältnis in turbulenter Strömung den Maximalwert. Die 1. Ableitung von (22) ergibt Null. Mit $a \rightarrow 0$ in (22) führt die Integration von (21) zu einem laminarem Geschwindigkeitsprofil.

$$\frac{C}{C'_0} = \left(Y - \frac{Y^2}{2} \right), \quad (23)$$

mit $C'_0 = 2$ als dimensionslosen Geschwindigkeitsanstieg an der Wand.

Beispiel

Für die Abhängigkeit der Zähigkeit vom Wandabstand wird (22) verwendet.

$$\frac{1}{C'_0} \cdot \frac{dC}{dY} = \frac{(1-Y)}{(1+a(Y - \frac{1}{2}Y^2))}$$

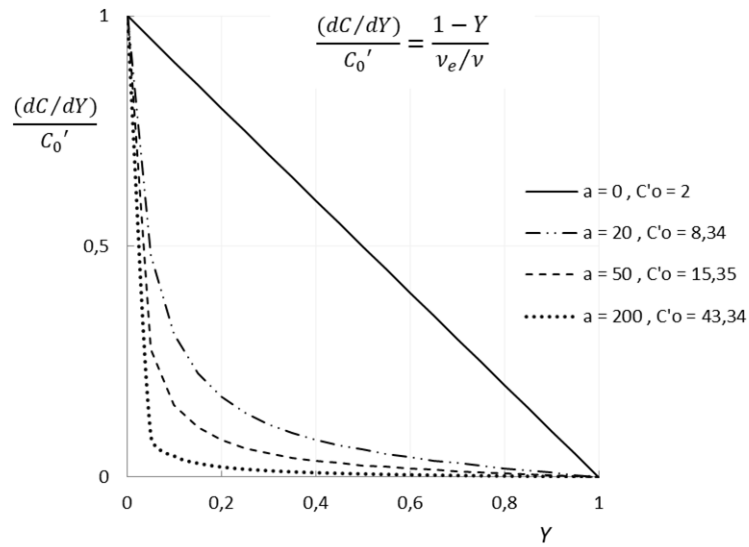
Die Integration liefert die Geschwindigkeitsfunktion

$$\frac{C}{C'_0} = \int \frac{(1-Y)}{(1+a(Y - \frac{1}{2}Y^2))} dY = \frac{1}{a} \ln \left(1 + a \left(Y - \frac{1}{2}Y^2 \right) \right)$$

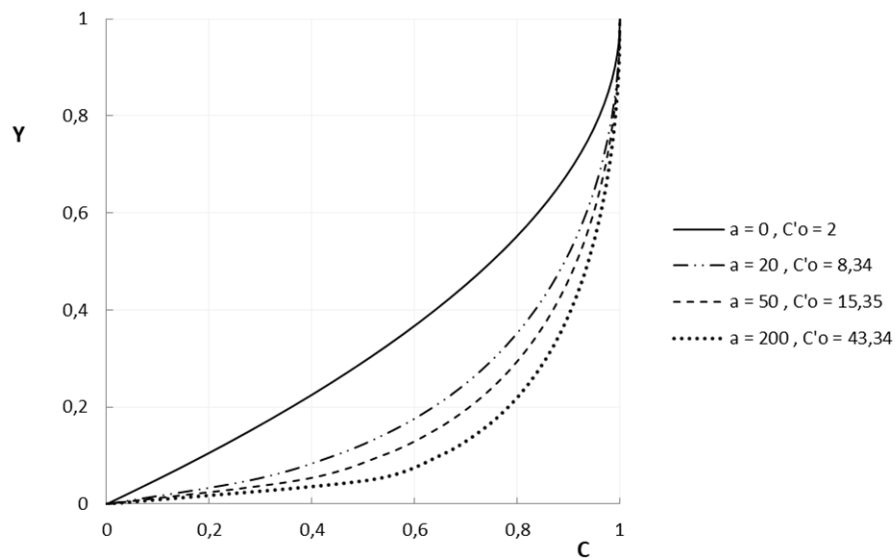
Mit $const = 0$ wird der Geschwindigkeitsanstieg an der Wand mit der Bedingung $Y = 0 \rightarrow C = 0$ gefunden.

$$C'_0 = \frac{a}{\ln\left(1 + \frac{a}{2}\right)}$$

Die Abhängigkeit $C(Y)$ für spezielle Kompaktprofile zeigt [Abbildung 3](#)



(a) Geschwindigkeitsanstieg entsprechend Gleichung (21)



(b) Geschwindigkeitsprofile

Abb. 3 Geschwindigkeitsprofile mit unterschiedlichen Ansätzen für die Zähigkeit berechnet. Mit $a = 0$ erhält man das laminare Geschwindigkeitsprofil

6 Das Zweiparabel-Profil

Die Funktion (21) wird entsprechend [Abbildung 4](#) vereinfachend angesetzt. Zwei Geraden, die beide am Abszissen- bzw. Ordinatenwert 1 beginnen, schneiden einander im Punkt D , bei $Y = Y_D$ und $\frac{dC/dY}{C_0'} = r \cdot Y_D$. Für die folgende Rechnung werden die Zusammenfassungen (24) angewendet.

$$\alpha = \frac{1 - rY_D}{Y_D}, \beta = \frac{rY_D}{1 - Y_D}, \gamma = \frac{2}{1 + r}, \delta = \frac{2r}{1 + r} \frac{1}{1 - Y_D} \quad (24)$$

Bei laminarer Strömung gilt $\alpha = \beta = 1$. Dann besteht zwischen r und Y_D der Zusammenhang $Y_D = 1/(1+r)$. Der Punkt D liegt in diesem Fall auf der gestrichelten Geraden in [Abbildung 4](#). Die Gerade entspricht dem Anstieg der Geschwindigkeit in einer laminaren Strömung.

Das Doppelintegral über die von A nach B gehende Gerade stimmt mit dem Integral über $C(Y)$ überein, es entspricht also der mittleren Geschwindigkeit bei Laminarität.

Das Integral über die Fläche A D B C.A ist so groß wie das Integral über $C(Y)$ bei Turbulenz.

Das Integral über die Differenzfläche A B D A entspricht dem Verlust an Transportgeschwindigkeit, den eine turbulente Schicht gegenüber einer laminaren bei gleich großem Druckabfall erfährt.

Das unbestimmte Integral über A D B liefert (abgesehen vom laminaren Fall mit nur einem Parabelbogen) Geschwindigkeitsprofile, die aus zwei Parabelbögen zusammengesetzt sind und bei Y_D stetig bezüglich C und dC/dY verlaufen.

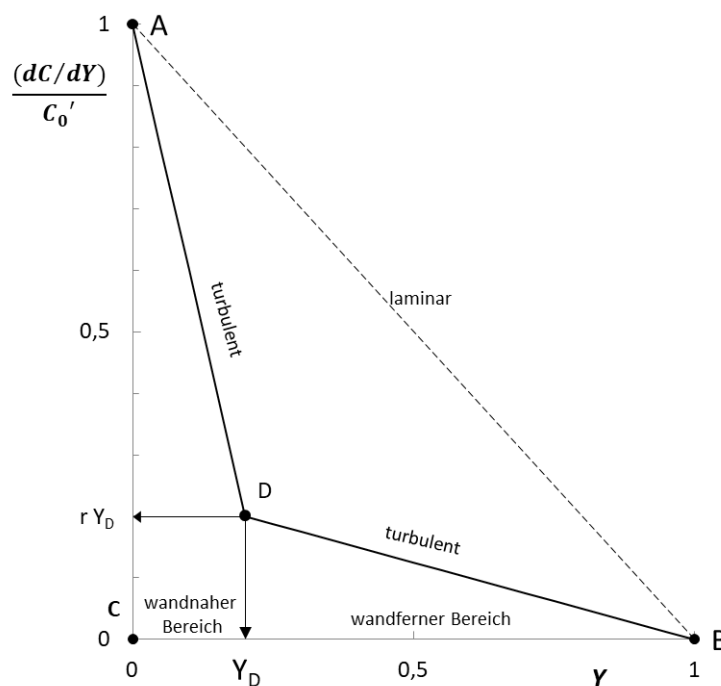


Abb. 4 Der mit dem Anstieg der Geschwindigkeit an der Wand dimensionslos gemachte Anstieg der Geschwindigkeit in Abhängigkeit vom Wandabstand Y für das Zweiparabelprofil

Das Integrieren wird nach Gleichung (25) aufgeteilt in einen wandnahen Bereich (I), $0 \leq Y \leq Y_D$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{C'_0} \frac{dC_I}{dY} &= 1 - \alpha Y \\ \frac{C_I}{C'_0} &= \frac{1}{C'_0} \int \frac{dC_I}{dY} = Y - \alpha \frac{Y^2}{2} \\ \int_0^{Y_D} \frac{C_I}{C'_0} dY &= \frac{Y_D^2}{2} - \alpha \frac{Y_D^3}{6}\end{aligned}\quad (25)$$

sowie in einen wandfernen Bereich (II) $Y_D \leq Y \leq 1$

$$\begin{aligned}\frac{1}{C'_0} \frac{dC_{II}}{dY} &= \beta(1 - Y) \\ \frac{C_{II}}{C'_0} &= \frac{1}{C'_0} \int \frac{dC_{II}}{dY} = \beta \left(Y - \frac{Y^2}{2} \right) + konst \\ \int_{Y_D}^1 \frac{C_{II}}{C'_0} dY &= \beta \cdot \left[\frac{1}{3} - \left(\frac{Y_D^2}{2} - \frac{Y_D^3}{6} \right) \right] + konst \cdot (1 - Y_D)\end{aligned}\quad (26)$$

Durch Gleichsetzen von $C_I = C_{II}$ bei $Y = Y_D$ findet man die Integrationskonstante

$$konst = (1 - \beta)Y_D + (\beta - \alpha) \frac{Y_D^2}{2}$$

Für den dimensionslos gemachten Geschwindigkeitsanstieg an der Wand, bei $Y = 0$, wird der Ausdruck

$$C'_0 = \frac{2}{(1+r)Y_D} = \frac{\gamma}{Y_D}\quad (27)$$

gesetzt. Für eine laminare Strömung wird $C'_0 = 2$.

Damit werden die bestimmten Integrale über die Geschwindigkeit geschrieben.

Für den wandnahen Bereich

$$\int_0^{Y_D} C_I dY = \frac{\gamma}{Y_D} \left(\frac{Y_D^2}{2} - \frac{Y_D^3}{6} \right) = \gamma \left(\frac{Y_D}{2} - \frac{Y_D^2}{6} \right),\quad (28)$$

sowie für den wandfernen Bereich

$$\int_{Y_D}^1 C_{II} dY = \frac{\gamma \cdot \beta}{Y_D} \left(\frac{1}{3} - \left(\frac{Y_D^2}{2} - \frac{Y_D^3}{6} \right) \right) + \frac{\gamma}{Y_D} \left[(1 - \beta)Y_D + (\beta - \alpha) \frac{Y_D^2}{2} \right] (1 - Y_D).\quad (29)$$

Für die mittlere Geschwindigkeit über wandnahen und wandfernen Bereich wird die Summe beider Teilbereiche gebildet.

$$\begin{aligned}\int_0^1 C dY &= \int_0^{Y_D} C_I dY + \int_{Y_D}^1 C_{II} dY \\ &= \gamma \left[1 - \frac{Y_D}{2} - \alpha \left(\frac{Y_D^2}{6} + \frac{Y_D}{2} (1 - Y_D) \right) - \beta \left(1 - Y_D - (1 - Y_D) \frac{Y_D}{2} \right) \right] + \\ &\quad + \delta \left(\frac{1}{3} - \frac{Y_D^2}{2} + \frac{Y_D^3}{6} \right)\end{aligned}$$

Bei $Y_D \rightarrow 0$ strebt das Integral über $C(Y)$ einem Grenzwert zu. (30) und Tabelle 1.

$$\begin{aligned}
 y &\rightarrow 0, \\
 \int C_I dY &= 0 \\
 \int_{Y_D}^1 C_{II} dY &= \frac{2}{1+r} \left(\frac{r}{3} + \frac{1}{2} \right)
 \end{aligned} \tag{30}$$

Im allgemeinen wird die Größe des Parameters r aus dem Vergleich dieser bestimmten Integrale mit Messwerten festgestellt.

Jedoch lässt sich $r(Y_D)$ in dem Spezialfall einer stark beschleunigten Strömung auch berechnen. Aus (25) wird die zweite Geschwindigkeitsableitung an der Wand gebildet.

$$\frac{d^2 C_I}{dY^2} = C'_0 \cdot \left(-\frac{1-r \cdot Y_D}{Y_D} \right) = -\text{Ha}^* \tag{31}$$

Wenn $C'_0 = \alpha$ gesetzt wird, dann ergibt sich aus dem Produkt, nach kurzer Zwischenrechnung, eine quadratische Gleichung für $r(Y_D)$

$$r^2 - \frac{1-Y_D}{Y_D} r + \frac{1}{Y_D} = 0 \tag{32}$$

mit der Wurzel

$$r = \frac{1-Y_D}{2Y_D} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4Y_D}{(1-Y_D)^2}} \right) \tag{33}$$

Die Hagenzahl wird $\text{Ha}^* = \alpha^2$. Die r -Werte werden gleich oder größer als Eins. Das mit dieser Rechnung erfassbare größte Y_D beträgt 0,17. Dann wird der Radikand von (33) zu Null. Für $Y_D \rightarrow 0$ wird $r = 1$.

Abbildung 5 zeigt Geschwindigkeitsprofile, die mit dem Ansatz von zwei Parabeln (Gleichungen (25) und (26)) berechnet wurden. Der Kurvenzug $C'_0 = 2$ entspricht einer laminaren Strömung.

In Tabelle 1 sind die mittleren Geschwindigkeiten unterschiedlicher Profile aufgeschrieben worden. Die auf diese Weise berechneten Profile $C(Y)$ stimmen mit Messungen gut überein. Ein Zweiparabelprofil war bereits im

	$r = 1,0$	$r = 0,8$	$r = 0,6$	$r = 0,4$	$r = 0,2$	$r \rightarrow 0$
$Y_D = 1/2$	0,6667	0,6852	0,7083	0,7381	0,7778	0,8333
$Y_D = 1/3$	0,7222	0,7407	0,7639	0,7937	0,8333	0,8889
$Y_D = 1/5$	0,7667	0,7852	0,8083	0,8381	0,8778	0,9333
$Y_D = 1/6$	0,7778	0,7963	0,8194	0,8492	0,8889	0,9444
$Y_D = 1/7$	0,7857	0,8042	0,8274	0,8571	0,8968	0,9524
$Y_D = 1/8$	0,7917	0,8102	0,8333	0,8631	0,9028	0,9583
$Y_D = 1/9$	0,7963	0,8148	0,8380	0,8677	0,9074	0,9630
$Y_D = 1/10$	0,8000	0,8185	0,8417	0,8714	0,9111	0,9667
$Y_D = 1/20$	0,8167	0,8352	0,8583	0,8881	0,9278	0,9833
$Y_D = 1/40$	0,8250	0,8435	0,8667	0,8964	0,9361	0,9917
$Y_D = 1/80$	0,8292	0,8477	0,8708	0,9006	0,9403	0,9958
$Y_D = 1/160$	0,8313	0,8498	0,8729	0,9027	0,9424	0,9979
$Y_D \rightarrow 0$	0,8333	0,8519	0,8750	0,9048	0,9444	1,0000

Tabelle 1 Mittlere Geschwindigkeit $\int_0^1 C dY$ von Zweiparabelprofilen abhängig von Y_D und r .

Jahr 1995 vorgestellt worden. [22]

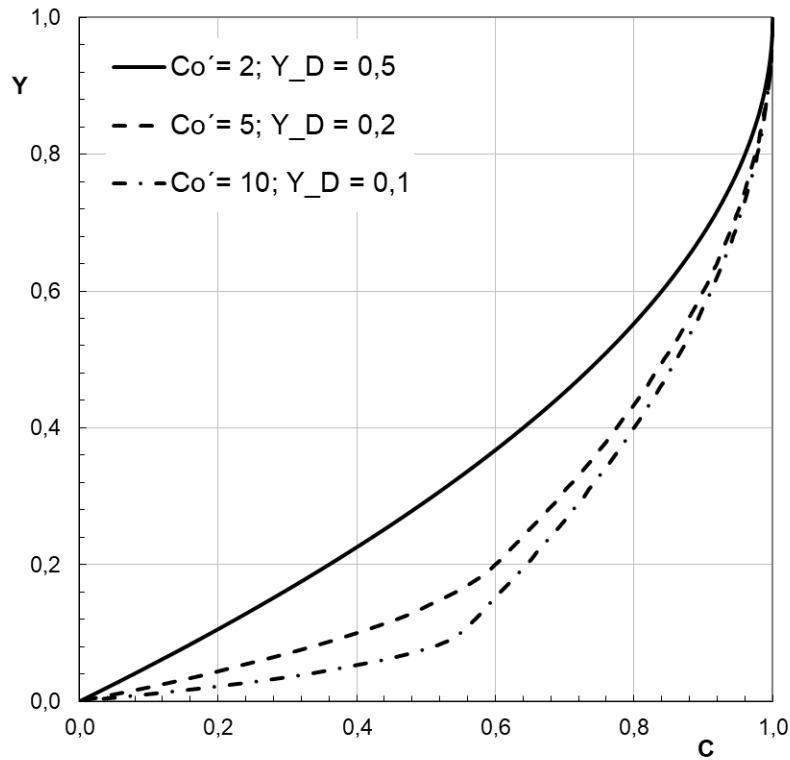


Abb. 5 Geschwindigkeitsprofile mit zwei Parabeln (Gleichungen (25) und (26)) berechnet. Der Kurvenzug $C'_0 = 2$ entspricht einer laminaren Strömung

7 Bei Turbulenz mindern parasitäre Wirbel die fluide Transportarbeit gegenüber der laminaren Strömung

In einer turbulenten Strömung bilden sich dauernd Wirbel, deren Energie bald durch Reibungsarbeit verbraucht wird. Die Wirbel verschwinden wieder, doch andauernd sind neue entstanden.

Beim gleichen Druckgefälle bewegt sich eine turbulente Kanalströmung weniger schnell als eine, nicht durch Wirbel gebremste, laminare Strömung. Bisweilen hat man die überlagerten Wirbel als Energieparasiten bezeichnet.

Um eine quantitativ begründbare Vorstellung von der Größe des Energieverbrauchs zu erhalten, folgt eine Rechnung für ein vereinfachtes System.

Dabei wird der natürliche Ablauf des ständigen Entstehen und Verlöschen von Wirbeln durch ein beständiges Wirbelfeld ersetzt. Das entzieht dem überlagerten Hauptstrom Energie und wandelt sie in Reibungsarbeit um. Mit Kenntnis der Kinematik von Wirbelfeldern [15] wird somit die kinetische Energie, die dem Hauptstrom entnommen wird, berechenbar.

Man reduziert die Wirbel zu einem ebenen Wirbelfeld (Abb. 22. 3 in [18]), mit der Stromfunktion

$$\Psi = K \cdot \cos \gamma \cdot \cos \delta. \quad (34)$$

Darin besitzt K die Dimension $[\text{m}^2/\text{s}]$, $\gamma = a_i \cdot x$ und $\delta = a_i \cdot y$.

Durch Differenzieren der Stromfunktion findet man die Geschwindigkeitskomponenten.

$$\begin{aligned} c_x &= \frac{\partial \Psi}{\partial y} = K \cdot (-a_i) \cdot \cos \gamma \cdot \sin \delta \\ c_y &= -\frac{\partial \Psi}{\partial x} = K \cdot a_i \cdot \sin \gamma \cdot \cos \delta \end{aligned} \quad (35)$$

Die Quadrate der Geschwindigkeit entsprechen der kinetischen Energie pro Masseneinheit.

$$c_{\text{ges}}^2 = c_x^2 + c_y^2 = K^2 \cdot a_i^2 \cdot (\cos^2 \gamma \cdot \sin^2 \delta + \sin^2 \gamma \cdot \cos^2 \delta) \quad (36)$$

Die Integration von c^2 über γ und δ liefert wegen

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos^2 \gamma \, d\gamma &= \frac{1}{4} \sin 2\gamma + \frac{\gamma}{2} \Big|_0^{2\pi} = \pi \\ \int_0^{2\pi} \sin^2 \gamma \, d\gamma &= -\frac{1}{4} \sin 2\gamma + \frac{\gamma}{2} \Big|_0^{2\pi} = \pi \end{aligned} \quad (37)$$

das Ergebnis

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} c_{\text{ges}}^2 \, d\gamma \, d\delta = 2\pi^2 K^2 a_i^2 \left[\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \right] \quad (38)$$

Im Folgenden werden die Integrale über das laminare Profil (23) und das turbulente Feld (10) angegeben.

$$\begin{aligned} C_L^2 &= C_0'^2 (Y^2 - Y^3 + Y^4/4) \\ \int_0^1 C_L^2 \, dY &= C_0'^2 \left(\frac{Y^3}{3} - \frac{Y^4}{4} + \frac{Y^5}{20} \right) \Big|_0^1 = \frac{2}{15} C_0'^2 \\ C_T^2 &= Y^{2/7} \\ \int_0^1 C_T^2 \, dY &= \frac{7}{9} Y^{9/7} = \frac{7}{9} \end{aligned} \quad (39)$$

Jetzt kann die Energiedifferenz zwischen einem laminare und einem turbulenten Profil bestimmt werden.

$$\int_0^1 C_L^2 \, dY - \int_0^1 C_T^2 \, dY = \frac{2}{15} C_0'^2 - \frac{7}{9} \quad (40)$$

Sie entspricht gerade dem Arbeitsverbrauch eines, dem Hauptstrom überlagerten, Wirbelsystems. Das Gleichsetzen von (38) und (40) führt zu

$$2\pi^2 K^2 a_i^2 = \left(\frac{2}{15} C_0'^2 - \frac{7}{9} \right) c_{T_{\text{max}}}^2 \quad (41)$$

In der Gleichung (42) wird berücksichtigt, dass auf einer Fläche h^2 die Anzahl von n^2 Wirbelfeldern einzufügen sind. Im Zähler, auf der linken Seite erscheint die Wirbelgeschwindigkeit $K \cdot a_i$. Im Nenner steht das Maximum der turbulenten Hauptgeschwindigkeit.

$$\frac{K a_i}{c_{T \max}} = \frac{1}{n} \sqrt{\frac{\frac{2}{15} C_0'^2 - \frac{7}{9}}{2\pi^2}} \quad (42)$$

Wenn im Beispiel als kinetische Energie des turbulenten Hauptstromes vom Profil (A 10) der Zahlenwert $7/9$ eingesetzt wird, dann müsste das turbulente Geschwindigkeitsprofil einen Anstieg der Geschwindigkeit an der Wand von mindestens $C_0' = \sqrt{35/6} = 2,41$ erreichen. Dieser Wert liegt nahe bei der unteren Grenze des voll ausgebildeten turbulenten Gebiets in Prandtl's Koordinaten [Abbildung 2](#).

8 Die Verbindung von Geschwindigkeitsanstieg an der Wand und Re-Zahl bei einer Kanalströmung

Bei der Kanalströmung lässt sich der in der Überschrift formulierte Zusammenhang aus zwei Gründen leicht bestimmen.

Erstens sind, für gleich großen Druckabfall in Strömungsrichtung, die Steigung eines vergleichbaren laminaren und die des turbulenten Geschwindigkeitsprofils an der Wand gleich groß.

Zweitens stimmen die Höhen beider zu vergleichenden Geschwindigkeitsprofile mit der halben Kanalhöhe h überein.

Die Indizes L und T stehen jeweils für Laminarität und für Turbulenz. Es kann das Verhältnis zugehöriger mittlerer Geschwindigkeiten von Laminarität und Turbulenz dem Verhältnis der Reynoldszahlen gleichgesetzt werden. ($C_{\text{mittel}L} = \int_0^1 \int_0^1 (1 - Y) dY = C_0'/3$)

$$\frac{Re_L}{Re_T} = \frac{c_{\text{mittel}L}}{c_{\text{mittel}T}} = \frac{C_0'/3}{\int_0^1 C_T dY} \quad (43)$$

Mit Re^* wird die Reynoldszahl bezeichnet, bei der die Laminarität endet und die Turbulenz beginnt. Beim Zahlenwert $Re^* = 2039$ liegt der gemeinsame Punkt in den Auftragungen $\lambda(Re)$ des nach Hagen geltenden Verlaufes für Laminarität und des Verlaufes für Turbulenz nach Blasius.

Man bildet das Verhältnis Re_L/Re^* . Ist $Re_L = Re^*$ dann gilt $C_0' = 2$. In der Rechnung bleibt also Re^* eine konstante Größe. Mit einem um einen Faktor m vergrößerten laminaren Wert $Re_L = m \cdot Re^*$, ändert sich auch $C_0'/2$ um den selben Faktor. Wird $m = C_0'/2$ gewählt, dann ergibt sich

$$\frac{Re_L}{Re^*} = \left(\frac{C_0'}{2} \right)^2. \quad (44)$$

Dann lässt sich aus (43) und (44) auch das Verhältnis Re_T/Re^* bestimmen.

$$\frac{Re_T}{Re^*} = \frac{Re_L}{Re^*} \cdot \frac{Re_T}{Re_L} = \left(\frac{C_0'}{2} \right)^2 \cdot \frac{3 \int_0^1 C_T dY}{C_0'} = \frac{3}{4} C_0' \int_0^1 C_T dY \quad (45)$$

Damit ist es möglich, bei bekanntem Anstieg an der Wand C_0' und gegebenem Geschwindigkeitsprofil $C(Y)$, das bestimmte Integral von C über Y auszurechnen und schließlich dem Reynoldszahlverhältnis Re_T/Re^* zuzuordnen.

9 Beziehung zwischen Geschwindigkeitsanstieg an der Wand und Widerstandsbeiwert

Wenn der Geschwindigkeitsanstieg an der Wand C'_0 und Re_T bekannt sind, kann die Verbindung zur dimensionslosen Wandschubspannung

$$\begin{aligned} \tau_W &= \nu \cdot \rho \cdot C'_0 \cdot \frac{c_{\max}}{h} \\ \frac{\tau_W}{\rho \cdot c_{\text{mittel}}^2} &= \frac{\nu}{4h \cdot c_{\text{mittel}}} \cdot 4 \cdot C'_0 \cdot \frac{c_{\max}}{c_{\text{mittel}}} = 4 \cdot \frac{C'_0}{Re_T} \cdot \frac{c_{\max}}{c_{\text{mittel}}} \end{aligned} \quad (46)$$

und zum Widerstandsbeiwert

$$\lambda = 8 \cdot \frac{\tau_W}{\rho \cdot c_{\text{mittel}}^2} = 8 \cdot 4 \cdot \frac{C'_0}{Re_T} \cdot \left(\frac{c_{\max}}{c_{\text{mittel}}} \right)_T \quad (47)$$

hergestellt werden.

Damit ist auch der Verlustbeiwert λ der Kanalströmung erfassbar. [15] Die Abhängigkeit $Re_T = f(C'_0)$ ist mit (45) festgelegt, dieses in (47) eingesetzt, führt zur Endgleichung

$$\lambda = 32 \cdot \frac{4}{3Re^* \left(\int_0^1 CdY \right)^2} = \frac{42,67}{Re^*} \cdot \frac{1}{\left(\int_0^1 CdY \right)^2}. \quad (48)$$

10 Über den Zusammenhang von Geschwindigkeitsanstieg an der Wand und Reynoldszahl in Grenzschichten

In den voran geschriebenen Kapiteln war die Abhängigkeit der Geschwindigkeit vom Wandabstand in turbulenten Kanalströmungen ermittelt worden. Nun soll weiterhin erkundet werden zu welcher Reynoldszahl eine Grenzschichtströmung gehört, deren dimensionsloser Geschwindigkeitssteigerung an der Wand C'_0 beträgt.

Man benutzt dazu die Postulate der Ähnlichkeitsmechanik [18] und ein von Blasius im Jahr 1913 publiziertes Messergebnis [2],

$$\lambda = 0,3164 \cdot Re^{-1/4}. \quad (49)$$

In strömungsmechanischen Anwendungen verwendet man die folgenden Formen. Mit Re wird bei Rohr- und Kanalströmungen gearbeitet, bei Grenzschichten mit Re_δ . Für ein gerades zylindrisches Rohr mit dem Durchmesser D gilt $Re = c_{\text{mittel}} D / \nu$.

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= \frac{4 \cdot \frac{A}{U} \cdot \frac{-dp}{ds}}{\rho \cdot c_{\text{mittel}}^2} \\ Re &= 4 \cdot \frac{A}{U} \cdot \frac{c_{\text{mittel}}}{\nu} \\ Re_\delta &= \frac{c_{\max} \cdot \delta}{\nu} \\ \frac{\tau_W}{\rho \cdot c_{\text{mittel}}^2} &= \frac{\lambda}{8} \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

Unter (50) findet man eine Beziehung von Widerstandsbeiwert λ und Wandschubspannung τ_W . Damit kann (49) zu (51) umgeschrieben werden.

$$\frac{\tau_W}{\rho \cdot c_{\text{mittel}}^2} = \frac{0,3164}{8} \left[4 \cdot \frac{A}{U} \cdot \frac{c_{\text{mittel}}}{\nu} \right]^{-1/4} \quad (51)$$

Der in (50) und (51) stehende Quotient (A/U) ist der hydraulischer Durchmesser. (A = Strömungsquerschnitt, U = benetzter Umfang) Bei der Kanalströmung gilt.

$$\frac{A}{U} = \frac{Hb}{2H + 2b}$$

($H = 2h$ ist die Kanalhöhe und b die Kanalbreite) Für b sehr viel größer als H wird

$$\frac{A}{U} = \frac{H}{2} = h. \quad (52)$$

Damit wird (51) zu

$$\frac{\tau_W}{\rho \cdot c_{\text{mittel}}^2} = \frac{0,3164}{8} \left[4 \cdot h \cdot \frac{c_{\text{mittel}}}{\nu} \right]^{-1/4} \quad (53)$$

Nachfolgend wird eine Strömung innerhalb einer Kanalhälfte mit einer unbeschleunigten Grenzschichtströmung längs einer ebenen Platte verglichen. Die halbe Kanalhöhe h geht dann in die Grenzschichtdicke δ über.

$$\frac{\tau_W}{\rho \cdot c_{\text{mittel}}^2} = \frac{0,3164}{8} \left[4 \cdot h \cdot \frac{c_{\text{mittel}}}{\nu} \right]^{-1/4} = \frac{0,3164}{8} \left[4 \cdot \text{Re}_\delta \cdot \frac{c_{\text{mittel}}}{c_{\text{max}}} \right]^{-1/4} \quad (54)$$

Der dimensionslose Reibungsbeiwert λ wird der Wandschubspannung gleich gesetzt.

$$\frac{\tau_W}{\rho \cdot c_{\text{mittel}}^2} = \frac{\nu \rho \left(\frac{dc_x}{dy} \right)_{y=0}}{\rho \cdot c_{\text{mittel}}^2} = \frac{\nu \cdot C'_0 \cdot c_{\text{max}}}{c_{\text{mittel}} \cdot \delta \cdot c_{\text{mittel}}} = \frac{C'_0}{\text{Re}_\delta} \cdot \left(\frac{c_{\text{max}}}{c_{\text{mittel}}} \right)^2 \quad (55)$$

Die so gebildete neue Gleichung (55) nach Re_δ aufgelöst, führt zu (56), wobei $h = \delta$ gesetzt wird.

$$\left. \begin{aligned} \text{Re}_\delta &= 117,8 \cdot (C'_0)^{4/3} \left(\frac{c_{\text{max}}}{c_{\text{mittel}}} \right)^{7/3} \\ \text{Re} &= 4 \cdot \text{Re}_\delta \cdot \left(\frac{c_{\text{mittel}}}{c_{\text{max}}} \right) \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

Anschließend wird nach C'_0 aufgelöst und die für turbulente Strömung gebräuchliche Näherung $c_{\text{max}}/c_{\text{mittel}} = 8/7$ genutzt. Dann erhält man

$$\left. \begin{aligned} C'_0 &= 2,21 \cdot 10^{-2} \cdot \text{Re}_\delta^{3/4}, \\ \text{Re}_\delta &= 160,86 \cdot (C'_0)^{4/3}. \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

Beispiele

1) Laminare Strömung

Mit dem kleinsten Grenzwert der Messung von Blasius bei $Re = Re^*$ und $C'_0 = 2$, sowie $\frac{c_{\max}}{c_{\text{mittel}}} = \frac{3}{2}$, errechnet man aus (56):

$$Re_\delta = 117,8 \cdot (2)^{4/3} \left(\frac{3}{2}\right)^{7/3} = \underline{764,5}.$$

$$Re = Re^* = 4 \cdot Re_\delta \cdot \left(\frac{c_{\text{mittel}}}{c_{\max}}\right) = 4 \cdot 764,5 \cdot \frac{2}{3} = \underline{2039}.$$

2) Turbulente Strömung

Mit $Y_D = 1/20$ und $r = 1$, findet man in [Tabelle 1](#) den Wert $\frac{c_{\text{mittel}}}{c_{\max}} = \int_0^1 C dY = 0,8167$. Nach Gleichung (27) wird $C'_0 = 20$. Gleichung (56) liefert:

$$Re_\delta = 117,8 \cdot (20)^{4/3} \left(\frac{1}{0,8167}\right)^{7/3} = \underline{1,03 \cdot 10^4}.$$

$$Re = 4 \cdot Re_\delta \cdot \left(\frac{c_{\text{mittel}}}{c_{\max}}\right) = 4 \cdot 1,03 \cdot 10^4 \cdot 0,8167 = \underline{3,36 \cdot 10^4}.$$

3) Kanalströmung

In einer Kanalströmung ist die Reynoldszahl $Re = 10^5$. Wie groß werden C'_0 sowie $\frac{c_{\text{mittel}}}{c_{\max}}$?
Nach Gleichung (56) wird

$$Re = 4 \cdot 117,8 \cdot (C'_0)^{4/3} \left(\frac{c_{\max}}{c_{\text{mittel}}}\right)^{4/3}.$$

$$C'_0 = \left(\frac{10^5}{4 \cdot 117,8}\right)^{3/4} \left(\frac{c_{\max}}{c_{\text{mittel}}}\right) = 55,61 \cdot \left(\frac{c_{\max}}{c_{\text{mittel}}}\right)$$

Nach [Tabelle 1](#) gilt für ein Zweiparabelprofil, mit $r = 1$, das Geschwindigkeitsverhältnis $c_{\text{mittel}}/c_{\max} = 0,83$. Also wird $C'_0 = 67$.

Bei Rechnungen mit der Gleichung (53) von Blasius gilt $Re = 10^5$ als obere Grenze. Mit einer Weiterrechnung von Prandtl kann die Anwendungsgrenze bis nach $Re = 10^7$ verschoben werden, siehe [Tabelle 2](#).

Re	λ	C'_0
$1,0 \cdot 10^5$	0,0180	49,2
$5,0 \cdot 10^5$	0,0131	179
$1,0 \cdot 10^6$	0,0116	317
$5,0 \cdot 10^6$	0,0090	1230
$1,0 \cdot 10^7$	0,0081	2210

Tabelle 2

11 Die Hagenzahl einer Kanalströmung

Die Hagenzahl gilt als Verhältnis von Druckkraft zur Zähigkeitskraft.

Bei den Grenzschichten lässt sie sich als Randbedingung festlegen: An der Wand, bei $Y = 0$ entspricht die zweite Ableitung der Geschwindigkeit C nach Y der negativen Hagenzahl.

$$\left(\frac{d^2C}{d^2Y}\right)_{Y=0} = -\text{Ha}^* \quad (58)$$

$$\text{Ha}^* = \left(\frac{-dp}{dx}\right) \frac{\delta^2}{c_{\max} \cdot \nu \cdot \rho}, \quad (59)$$

wobei zwischen dp/dx und der Geschwindigkeitsänderung folgender Zusammenhang besteht:

$$-\frac{dp}{dx} = \rho \cdot c \cdot \frac{dc}{dx}. \quad (60)$$

Bei Kanal- und Rohrströmungen gilt konstanter Querschnitt.

Durch das Gleichsetzen der bekannten (Gleichung (21.15) in [18])

$$\lambda = 2 \cdot \frac{\text{Ha}}{\text{Re}} \quad (61)$$

mit der Beziehung für den Reibungsbeiwert an der Wand

$$\lambda = 8 \cdot \frac{\tau_W}{\rho \cdot c_{\text{mittel}}^2} = 8 \cdot 4 \cdot \left(\frac{\nu}{4 \cdot c_{\text{mittel}} \cdot h}\right) \cdot C'_0 \cdot \frac{c_{\max}}{c_{\text{mittel}}} \quad (62)$$

erhält man

$$\text{Ha} = 16 \cdot C'_0 \cdot \frac{c_{\max}}{c_{\text{mittel}}} \quad \text{und} \quad \text{Ha}^* = C'_0. \quad (63)$$

Im Kapitel 21 des Lehrbuchs Angewandte Strömungslehre [18] ist die Ha-Zahl entsprechend der Ähnlichkeitsmechanik definiert. Bei der Berechnung von Grenzschichten, ebenda im Kapitel 24.5, wurde die Hagenzahl jedoch dem früher von den Strömungsmechanikern verwendeten Pohlhausen-Parameter $\text{Ha}^* = -dp/dx \cdot \delta^2 / (\eta \cdot c_{\max})$ angepasst. Beim weiteren Gebrauch war das unterscheidende (*) fortgelassen worden. Zwischen beiden unterschiedlich definierten Hagenzahlen besteht bei ($h = \delta$) der Zusammenhang $\text{Ha}/\text{Ha}^* = 16 \cdot c_{\max}/c_{\text{mittel}}$.

Beispiele

- 1.) Eine laminare Strömung mit $C'_0 = 2$ und $\frac{c_{\max}}{c_{\text{mittel}}} = \frac{3}{2}$, ergibt $\text{Ha} = \frac{16 \cdot 2 \cdot 3}{2} = 48$ und $\text{Ha}^* = 2$.
- 2.) Für eine spezielle turbulente Strömung mit $C'_0 = 20$ und $\frac{c_{\max}}{c_{\text{mittel}}} = 0,8167$ ergibt sich $\text{Ha} = 392$.

12 Das Umformen von Geschwindigkeitsprofilen einer Kanalströmung in ein Grenzschichtprofil

Im Folgenden wird vorausgesetzt, dass die Beziehung (21) in guter Näherung auch für Grenzschichten anwendbar ist. Gegenüber den Profilen der Kanalströmung wird bei Grenzschichten zusätzlich gefordert

$$\left(\frac{d^2C}{dY^2}\right)_{Y=0} = -\text{Ha}^* = b \cdot C'_0 \quad (64)$$

sowie

$$\left(\frac{d^3 C}{dY^3}\right)_{Y=0} = 0. \quad (65)$$

Die Bedingung (65) wird aus Prandtls Grenzschichtgleichung gefolgert. (Siehe [18] Gleichung (24.11a)). Beim Ableiten der Grenzschichtgleichung nach Y verschwindet der Summand $\frac{1}{\rho} \cdot \frac{dp}{dx}$ auf der linken Seite der Gleichung. Das Differenzieren der linken Gleichungsseite ergibt Null an der Wand bei $Y = 0$.

Nach dem Impulssatz der Strömungsmechanik (Kapitel 3.5 in [18]) gilt für eine Kanalströmung:

$$\tau_W = -\frac{dp}{dx} \cdot h \quad (66)$$

Mit

$$\tau_W = \nu \cdot \rho \cdot C'_0 \frac{c_{\max}}{h}$$

wird

$$C'_0 = \frac{-\frac{dp}{dx} \cdot h^2}{\nu \cdot \rho \cdot c_{\max}} = +\text{Ha}^* \quad (67)$$

Der Vergleich von (64) mit (67) zeigt, dass für den Kanal $b = 1$ gilt. Mit $\text{Ha}^* = C'_0$ ist das Kriterium der Kanalströmung erschienen.

Zum Umwandeln von Kanalströmungen zu Grenzschichtströmungen wird folgender Ansatz genutzt. [16]

$$\frac{1}{C'_0} \left(\frac{dC}{dY}\right) = A \cdot Y \cdot \exp(-\varepsilon \cdot Y) + \frac{1}{C'_0} \left(\frac{dC}{dY}\right)_{\text{Kanal}} \quad (68)$$

Damit werden die Bedingungen (64) und (67) erfüllt.

Beispiel

1) Kompaktprofil: Die Rechnung ergibt $A = 1 + a - b$ und $\varepsilon = \frac{2(a+a^2)}{1+a-b}$, gültig für $b < 1 + a$.

2) Zweiparabelprofil: $\left(\frac{1}{C'_0}\right)_{\text{Kanal}} = -\varepsilon \cdot Y$, bei $Y = 0$ wird $\left(\frac{1}{C'_0}\right)_{\text{Kanal}} = 1$, $\frac{1}{C'_0} \left(\frac{d^2 C}{dY^2}\right)_{\text{Kanal}} = -\varepsilon$,
 $\frac{1}{C'_0} \left(\frac{d^3 C}{dY^3}\right)_{\text{Kanal}} = 0$, $A = \alpha - b$, $\varepsilon = \frac{a+a^2}{\alpha-b}$, gültig für $b < \alpha$.

13 Entwicklung von Dreischichtenprofilen

Beim Zweiparabel-Profil wurde die Funktion $\frac{1}{C'_0} \left(\frac{dC}{dY}\right) = f(Y)$, entsprechend [Abbildung 4](#), mit nur zwei Schichten, einer wandnahen und einer wandfernen, stark vereinfacht gebildet.

Nun soll zusätzlich eine ausgleichende Mittelschicht eingefügt werden. Das Angebot an möglichen Verläufen dieser Schicht lässt sich durch eine Ähnlichkeitsbetrachtung reduzieren. Schon im Jahr 1954, war eine Ähnlichkeitskennzahl

$$K = \frac{\frac{dC}{dY}}{Y \cdot \frac{d^2 C}{dY^2}} \quad (69)$$

für das Strömen in Grenzschichten vorgestellt worden [21]. Sie wurde zunächst nur zu Vergleichen mit Stabilitätsrechnungen von laminaren Grenzschichten benutzt. Die Anwendungsmöglichkeit reicht aber weiter. Für turbulente Grenzschichten ist $K = -1$ begründet worden. Damit wird (69) als Differentialgleichung geschrieben

$$\frac{d^2C}{dY^2} + \frac{dC/dY}{Y} = 0 \tag{70}$$

und liefert als Integral für dC/dY das Ergebnis

$$\frac{dC}{dY} = Konst \cdot \exp\left(-\int \frac{dY}{K \cdot Y}\right) = Konst \cdot \exp(-\ln K \cdot Y) = Konst \cdot \frac{1}{Y}. \tag{71}$$

Also ist der Verlauf des Geschwindigkeitsanstiegs dC/dY in einem Wandabstand $Y_0 \leq Y \leq 1/2$ eine Hyperbel.

$$\frac{1}{C'_0} \left(\frac{dC}{dY}\right) = \frac{Y_0}{2} \cdot \frac{1}{Y} \tag{72}$$

Ausgenommen sind die übrigen wandnahen und wandfernen Gebiete, in denen die Randbedingungen einen anderen Verlauf erzwingen. In der [Abbildung 6](#) wurde der Geschwindigkeitsanstieg über dem Wandabstand aufgetragen. Gestrichelt gezeichnet ist eine Schar gleichseitiger Hyperbeln mit dem Parameter Y_0 . Der Anstieg eines laminaren Profils ($Y_0 = 1/2$) ist eine Gerade. Die Hyperbel ist zu einem Punkt geschrumpft.

Das Verlängern der Hyperbeln bis zu den Werten $\frac{1}{C'_0} \left(\frac{dC}{dY}\right) = 0$ und $Y = 0$, führt ins Unendliche. An jede

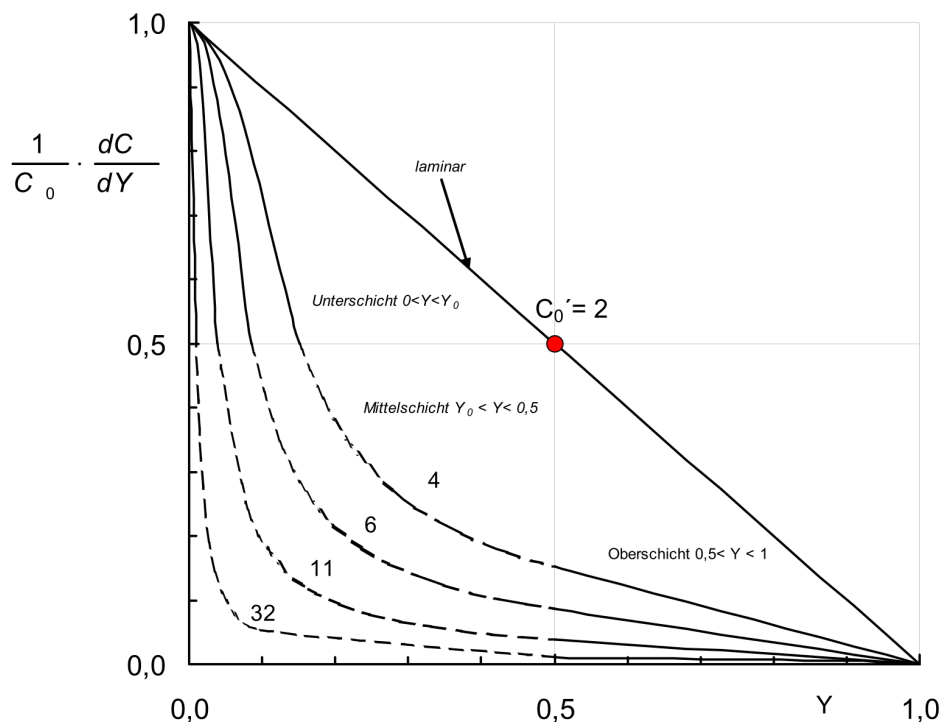


Abb. 6 Geschwindigkeitsanstieg in Abhängigkeit vom Wandabstand. Gestrichelt gezeichnet sind die Hyperbeln in der Mittelschicht mit den Parametern Y_0 und C'_0 . Mit abnehmendem C'_0 wird der Hyperbelbereich der Mittelschicht kleiner. Bei Laminarität schrumpft er zu einem Punkt. In diesem Fall ist $C'_0 = 2$ und $Y_0 = 0,5$.

Hyperbel sind in beiden Koordinatenpunkten mit dem Achswert 0,5 Tangenten gezeichnet. Diese schneiden die jeweilige Achse bei 1,0.

Ein Linienzug, der beim Ordinatenwert 1,0 beginnt, weiter über die Hyperbel läuft und dann, mit der bei $Y = 1/2$ beginnenden Tangente, bis zum Abszissenpunkt $Y = 0$ führt, ergibt nach dem Integrieren ein Geschwindigkeitsprofil.

Jedoch würde die Neigung der Tangente bei $Y = 0$, sie entspricht der zweiten Ableitung Geschwindigkeit d^2C/dY^2 an der Wand, eine zu große Hagenzahl ergeben. Für die Kanalströmung, die zuerst berechnet wird, muss jedoch gelten:

$$-\frac{d^2C}{dY^2} = \text{Ha}^* = C'_0$$

Diesen Wert für Ha^* erhält man, wenn die geradlinige Tangente durch die folgende Funktion ersetzt wird.

$$\frac{1}{C'_0} \left(\frac{dC}{dY} \right) = 1 - Y + \left(\frac{1}{2} - Y_0 \right) \cdot \left(-3 \cdot \left(\frac{Y}{Y_0} \right)^3 + 2 \cdot \left(\frac{Y}{Y_0} \right)^4 \right) \quad (73)$$

Beim Koordinatenpunkt $\frac{1}{C'_0} \left(\frac{dC}{dY} \right) = \frac{1}{2}$ und $Y = Y_0$ schließt der Verlauf (73) an die Hyperbel (72) an.

14 Das Dreischichtenprofil für die Kanalströmung

Für die Berechnung einer Kanalströmung werden folgende Randbedingungen berücksichtigt.

$Y = 0$ (an der Wand): $C = 0$, $dC/dY = C'_0$, $d^2C/dY^2 = -1$, $d^3C/dY^3 = 0$.

$Y = 1$ (in der Kanalmitte): $C = 1$, $dC/dY = 0$.

Man operiert weiterhin mit einem über Y dreifach, in Unterschicht, Mittelschicht und Oberschicht geteilten Funktionsverlauf.

in der Unterschicht, zwischen $Y = 0$ und $Y = Y_0$, gilt

$$\frac{1}{C'_0} \frac{dC}{dY} = 1 - Y + \left(\frac{1}{2} - Y_0 \right) \cdot \left(-3 \cdot \left(\frac{Y}{Y_0} \right)^3 + 2 \cdot \left(\frac{Y}{Y_0} \right)^4 \right) \quad (74)$$

$$\frac{C}{C'_0} = Y - \frac{Y^2}{2} + \left(\frac{1}{2} - Y_0 \right) \cdot \left(-\frac{3}{4} \cdot \frac{Y^4}{Y_0^3} + \frac{2}{5} \cdot \frac{Y^5}{Y_0^4} \right) \quad (75)$$

An der Verbindungsstelle zwischen Unter- und Mittelschicht, bei $Y = Y_0$ erreicht die Geschwindigkeit gerade die Größe K_1 .

$$\frac{C}{C'_0} = \frac{1}{40} \cdot (33Y_0 - 6Y_0^2) = K_1 \quad (76)$$

Die Mittelschicht liegt zwischen $Y = Y_0$ und $Y = 1/2$.

$$\frac{1}{C'_0} \left(\frac{dC}{dY} \right) = \frac{Y_0}{2} \cdot \frac{1}{Y} \quad (77)$$

$$\frac{C}{C'_0} = \frac{Y_0}{2} \cdot \ln Y + \text{const} = \frac{33}{40} \cdot Y_0 - \frac{3}{20} Y_0^2 + \frac{Y_0}{2} (\ln Y - \ln Y_0) \quad (78)$$

Die Integrationskonstante wurde mit der Bedingung $Y = Y_0$ bei $C/C'_0 = K_1$ gefunden.

Am wandfernen Ende der Mittelschicht, bei $Y = 1/2$, erreicht die Geschwindigkeit gerade die Größe K_2 .

$$\frac{C}{C'_0} = K_1 + \frac{Y_0}{2} \left(\ln \frac{1}{2} - \ln Y_0 \right) = K_2. \quad (79)$$

Die Oberschicht liegt zwischen $Y = 1/2$ und $Y = 1$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{C'_0} \left(\frac{dC}{dY} \right) &= 2Y_0(1 - Y) \\ \frac{C}{C'_0} &= \int 2Y_0(1 - Y) = 2 \cdot Y_0 \cdot \left(Y - \frac{Y^2}{2} \right) + const \end{aligned} \quad (80)$$

Die Integrationskonstante wird mit den Werten $Y = 1/2$ und $C = K_2$ bestimmt.

$$\begin{aligned} const &= K_2 - Y_0 \cdot \left(1 - \frac{1}{4} \right) = K_2 - \frac{3}{4} \cdot Y_0 \\ \frac{C}{C'_0} &= \frac{Y_0}{40} \cdot (33 - 6Y_0) + \frac{Y_0}{2} \left(\ln \frac{1}{2} - \ln Y_0 \right) + Y_0 \cdot \left(2Y - Y^2 - \frac{3}{4} \right) \end{aligned} \quad (81)$$

Bei $Y = 1$ soll $C = 1$ gelten. Aus dieser Normierungsbedingung wird der Geschwindigkeitsanstieg C'_0 an der Wand errechnet.

$$\begin{aligned} \frac{1}{C'_0} &= \frac{Y_0}{40} \cdot (33 - 6Y_0) + \frac{Y_0}{2} \left(\ln \frac{1}{2} - \ln Y_0 \right) + Y_0 \cdot \left(\frac{1}{4} \right) \\ C'_0 &= \frac{2}{Y_0 \cdot \left[\frac{43}{20} - \frac{3}{10} \cdot Y_0 + \ln \frac{1}{2} - \ln Y_0 \right]} \end{aligned} \quad (82)$$

Es lassen sich Y_0 -Werte, beginnend bei sehr kleinen (die zu hohen Reynoldszahlen gehören) bis zu $Y_0 = 1/2$ verwenden. Bei $Y_0 = 1/2$ erhält man nach Integration das Geschwindigkeitsprofil der laminaren Strömung. Wie in [Abbildung 6](#) sichtbar, schrumpft, bei Laminarität, die Hyperbel der Mittelschicht zu einem Punkt zusammen. Zwischen $Y_0 = 1/2$ und ungefähr $Y_0 = 0,1$ sind also auch zeitgemittelte Profile des Übergangsbereiches von laminar zu turbulent berechenbar.

Der Zusammenhang der Reynoldszahl $Re = \bar{c} \cdot 4 \cdot h / \nu$ und dem dimensionslosen Wandanstieg C'_0 wird aus der strömungsmechanischen Grundgleichung $\tau_W / (\rho \cdot \bar{c}^2) = \lambda / 8$ hergeleitet.

Für die linke Seite setzt man ,

$$\tau_W / (\rho \cdot \bar{c}^2) = \frac{4}{Re} C'_0$$

auf der rechten Seite benutzt man das Messergebnis von Blasius

$$\frac{\lambda}{8} = \frac{0,3164}{Re^{1/4}}$$

Daraus lässt sich schließlich mit Gleichung (56), $Re_\delta = 117,8 \cdot (C'_0)^{4/3} \left(\frac{c_{\max}}{c_{\text{mittel}}} \right)^{7/3}$ die Beziehung

$$Re = 4 \cdot Re_\delta \cdot \left(\frac{c_{\text{mittel}}}{c_{\max}} \right) = 471,2 \cdot (C'_0)^{4/3} \left(\frac{c_{\max}}{c_{\text{mittel}}} \right)^{4/3}$$

entwickeln. Bei der Zahlenrechnung ist das Geschwindigkeitsverhältnis $c_{\max} / c_{\text{mittel}} = 8/7$ gesetzt worden.

$$Re = 562,77 \cdot C'_0{}^{4/3}$$

Mit dem Ergebnis wird deutlich, dass nach dieser neuen Art der Deduktion ein turbulentes Geschwindigkeitsprofil errechnet werden kann, ohne Messergebnisse zur Verfügung zu haben. Ebenso wenig muss nach einer Wirbelzähigkeit gesucht werden.

Erst um die zugehörige Reynoldszahl aufzufinden, wurde auf ein Messergebnis zurückgegriffen.

15 Geschwindigkeitsprofil in ebenen turbulenten Grenzschichten

In einer Kanalströmung verschwinden die örtlichen Beschleunigungssummanden und die Gleichung (21) wird exakt erfüllt. Dagegen gilt bei den Grenzschichten (mit Ausnahme $Ha^*/C'_0 = 1$) die Voraussetzung verschwindender Beschleunigungssummanden nicht mehr. Jedoch bleiben die Beschleunigungssummanden immer sehr klein, wenn sich die Grenzschichtdicke δ nur wenig mit der Wegkoordinate x ändert.

Bei $Ha^* = 0$ gilt $0,03 > d\delta/dx > 0,01$, wobei der kleine Wert zur größeren Reynoldszahl gehört. Bei größeren Absolutwerten von Ha^* muss der Betrag von $d\delta/dx$ mit Hilfe einer Grenzschichtrechnung [18] überprüft werden. Für einen starken Anstieg $d\delta/dx$ gelten die nachfolgenden Rechnungen nicht !

Zum Berechnen von Grenzschichten wird die Hagenzahl modifiziert. Eine dem s. g. Pohlhausenparameter angepasste Hagenzahl wird durch das Verhältnis von Druckkraft zur Reibungskraft definiert:

$$Ha^* = \frac{-\frac{dp}{dx} \cdot \delta^2}{\rho \cdot \nu \cdot \bar{c}} = \frac{\rho \cdot \bar{c} \frac{d\bar{c}}{dx} \cdot \delta^2}{\rho \cdot \nu \cdot \bar{c}} = \frac{1}{\nu} \cdot \frac{d\bar{c}}{dx} \cdot \delta^2 = \frac{d \left[\frac{\bar{c} \cdot \delta_0}{\nu} \right]}{d \left[\frac{x}{\delta_0} \right]} \left(\frac{\delta}{\delta_0} \right)^2 \quad (83)$$

Die Hagenzahl Ha^* der Grenzschicht lässt sich deuten als differentielle Änderung der Reynoldszahl $\bar{c} \cdot \delta_0/\nu$ längs eines Wegelements x/δ_0 .

Sie ist positiv bei Beschleunigung, negativ beim Verzögern und Null, bei unbeschleunigter Plattenströmung. In jeder Grenzschicht muss an Wand (bei $Y = 0$) die Hagenzahl eben so groß sein wie die negative zweite Geschwindigkeitsableitung. Es gilt

$$Ha^* = \left(\frac{d^2 C}{dY^2} \right)_{Y=0}.$$

Der Zusammenhang von Hagenzahl Ha^* und Geschwindigkeitsanstieg an der Wand wird, am Ende der folgenden Rechnung, mit der Gleichung (94) bestimmt.

Für die Grenzschichtrechnung werden folgende Randbedingungen berücksichtigt:

$$\text{An der Wand:} \quad Y = 0, \quad C = 0, \quad \frac{dC}{dY} = C'_0, \quad \frac{d^2 C}{dY^2} = -Ha^*, \quad \frac{d^3 C}{dY^3} = 0.$$

$$\text{Am Grenzschichtrand:} \quad Y = 1, \quad C = 1, \quad \frac{dC}{dY} = 0, \quad \frac{d^3 C}{dY^3} = 0$$

Ebenso wie bei der Kanalströmung wird mit drei Schichten operiert:

Für die Unterschicht ($0 \leq Y \leq Y_0$) schreibt man eine Funktion $\frac{1}{C'_0} \left(\frac{dC}{dY} \right)$, die den Randbedingungen gehorcht.

$$\frac{1}{C'_0} \left(\frac{dC}{dY} \right) = 1 - \frac{3}{2} \left(\frac{Y}{Y_0} \right)^3 + \left(\frac{Y}{Y_0} \right)^4 + \frac{Ha^*}{C'_0} \left(-Y + 3Y_0 \left(\frac{Y}{Y_0} \right)^3 - 2Y_0 \left(\frac{Y}{Y_0} \right)^4 \right) \quad (84)$$

Das Integral liefert das Geschwindigkeitsprofil in der Unterschicht.

$$\frac{C}{C'_0} = Y - \frac{3}{8} \frac{Y^4}{Y_0^3} + \frac{1}{5} \frac{Y^5}{Y_0^4} + \frac{Ha^*}{C'_0} \left(-\frac{Y^2}{2} + \frac{3}{4} \frac{Y^4}{Y_0^2} - \frac{2}{5} \frac{Y^5}{Y_0^3} \right) \quad (85)$$

An der Grenze zwischen Unter- und Mittelschicht, bei $Y = Y_0$, wird die Geschwindigkeit gerade K_{1G} .

$$\left(\frac{C}{C'_0}\right)_{Y=Y_0} = \frac{33}{40}Y_0 - \frac{3}{20}Y_0^2 \frac{\text{Ha}^*}{C'_0} = K_{1G} \quad (86)$$

Im Fall $\text{Ha}^*/C'_0 = 1$ ergeben sich aus den Gleichungen (84) bis (86) die für die Kanalströmung spezialisierten Gleichungen (74) bis (76).

Die Mittelschicht liegt zwischen $Y = Y_0$ und $Y = 1/2$.

$$\frac{1}{C'_0} \left(\frac{dC}{dY}\right) = \frac{Y_0}{2} \cdot \frac{1}{Y} \quad (87)$$

$$\frac{C}{C'_0} = \frac{Y_0}{2} \cdot \ln Y + \text{const} = \frac{Y_0}{2} (\ln Y - \ln Y_0) + \frac{33}{40}Y_0 - \frac{3}{20}Y_0^2 \frac{\text{Ha}^*}{C'_0} \quad (88)$$

Mit der Bedingung $Y = Y_0$ bei $C/C'_0 = K_{1G}$ wurde die Integrationskonstante gefunden.

Am wandfernen Ende der Mittelschicht, bei $Y = 1/2$, erreicht die Geschwindigkeit gerade die Größe K_{2G} .

$$\frac{C}{C'_0} = \frac{33}{40}Y_0 - \frac{3}{20}Y_0^2 \frac{\text{Ha}^*}{C'_0} + \frac{Y_0}{2} \left(\ln \frac{1}{2} - \ln Y_0\right) = K_{2G}. \quad (89)$$

Die Oberschicht berücksichtigt die Bedingung, dass bei $Y = 1/2$ sowohl die erste, als auch die zweite Ableitung der Geschwindigkeit mit den entsprechenden der Mittelschicht übereinstimmen.

Man schreibt für die erste Ableitung der Geschwindigkeit in der Oberschicht

$$\frac{1}{C'_0} \left(\frac{dC}{dY}\right) = 2Y_0 (1 - Y) \quad (90)$$

und bestimmt, nach Integration die Geschwindigkeit

$$\frac{C}{C'_0} = 2Y_0 \left(Y - \frac{Y^2}{2}\right) + \text{const}. \quad (91)$$

Bei $Y = 1/2$ muss C/C'_0 eben so groß sein wie die Geschwindigkeit an der oberen Grenze der Mittelschicht, also K_{2G}

$$\frac{C}{C'_0} = K_{1G} + \frac{Y_0}{2} \left(\ln \frac{1}{2} - \ln Y_0\right) = K_{2G}.$$

Damit lässt sich die Konstante in Gleichung 91 bestimmen.

$$\text{const} = K_{2G} - \frac{3}{4}Y_0 = \frac{3}{40}Y_0 + \frac{Y_0}{2} \left(\ln \frac{1}{2} - \ln Y_0\right) - \frac{3}{20}Y_0^2 \frac{\text{Ha}^*}{C'_0} \quad (92)$$

Mit (91) erhält man die Funktion der Geschwindigkeit in der Oberschicht

$$\frac{C}{C'_0} = 2Y_0 \left(Y - \frac{Y^2}{2}\right) + \frac{3}{40}Y_0 + \frac{Y_0}{2} \left(\ln \frac{1}{2} - \ln Y_0\right) - \frac{3}{20}Y_0^2 \frac{\text{Ha}^*}{C'_0} \quad (93)$$

Bei $Y = 1$, am oberen Rand der Grenzschicht gilt $C = 1$. Daraus folgt (94), der dimensionslose Anstieg der Geschwindigkeit an der Wand.

$$C'_0 = \frac{1 + \frac{3}{20}Y_0^2Ha^*}{Y_0 \left(1 + \frac{3}{40} + \frac{1}{2} \left[\ln \frac{1}{2} - \ln Y_0 \right] \right)}. \quad (94)$$

In [Abbildung 7](#) sind errechnete Geschwindigkeitsprofile für $Ha = 0$ aufgetragen². [Abbildung 8](#) zeigt den

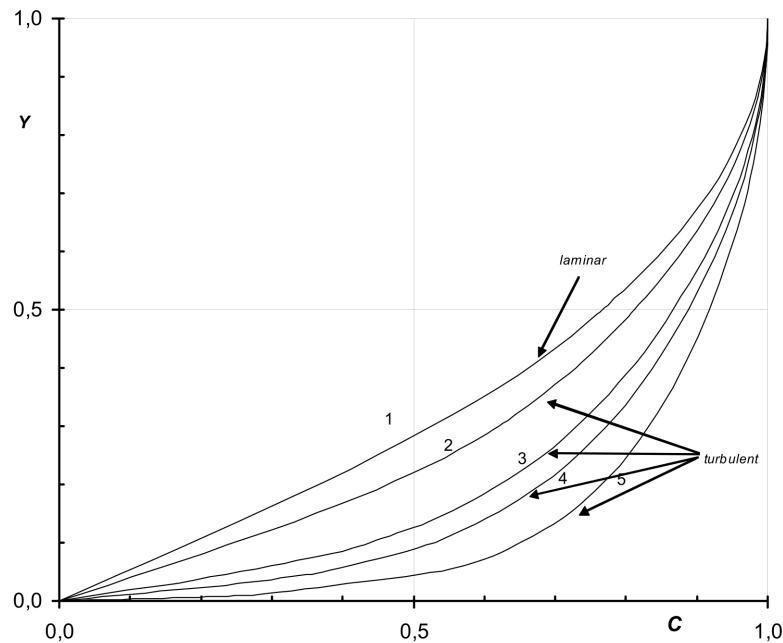


Abb. 7 Geschwindigkeitsprofile in Grenzschichten für $Ha = 0$ mit dem Dreischichtenprofil berechnet. Der Wert $Y_0 = 1/2$ kennzeichnet das laminare Profil, Mit kleinerem Y_0 werden turbulente Profile beschrieben.

Nr.	Y_0	C'_0	Re_δ	$\frac{\tau_w}{(\rho \cdot c^2)} = \frac{C'_0}{Re_\delta}$
1	0,5	1,86	$\leq Re_{\delta, krit}$	$\geq Re_{\delta, krit}$
2	0,3	2,51	$5,47 \cdot 10^2$	$4,58 \cdot 10^{-3}$
3	0,1	5,32	$1,49 \cdot 10^3$	$3,56 \cdot 10^{-3}$
4	0,05	8,98	$3,00 \cdot 10^3$	$2,99 \cdot 10^{-3}$
5	0,01	32,99	$1,70 \cdot 10^4$	$1,94 \cdot 10^{-3}$

entsprechenden Geschwindigkeitsanstieg. Das Verfahren ist auch im Extremfall laminarer Strömung anwendbar. Mit $Y_0 = 1/2$ verschwindet die Mittelschicht.

Bei starker Verzögerung wird nicht mit (94) und (95) gearbeitet, sondern nach einer speziellen Rechnung, die im folgenden Abschnitt 16 erläutert wird.

²Darin wurde $\frac{\tau_w}{(\rho \cdot c^2)} = \frac{C'_0}{Re_\delta}$ mit (53)(G 6) und Re_δ mit (55) (G 8) berechnet.

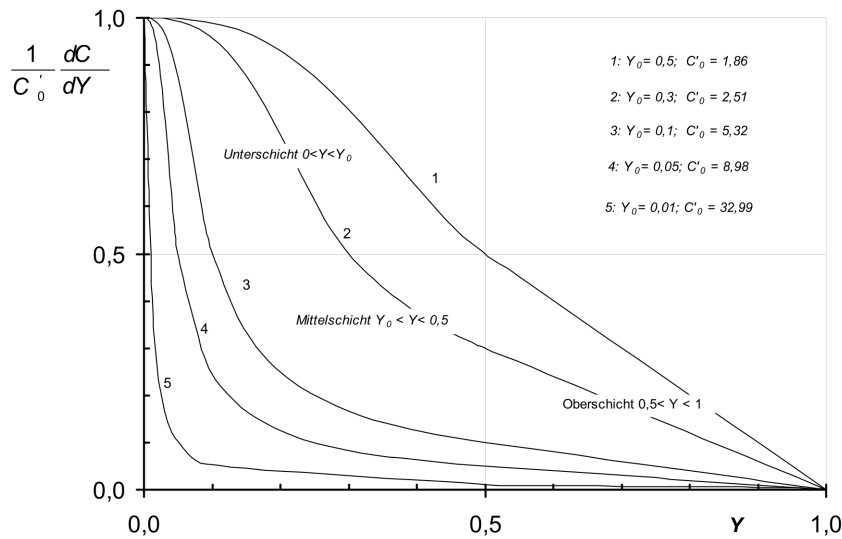


Abb. 8 Geschwindigkeitsanstieg in Grenzschichtströmungen mit dem Dreischichtenprofil berechnet.
 1: laminare Strömung,
 2 bis 5: Übergangsgebiet und turbulenter Bereich.

16 Das Ablöseproblem

Mit der durch den Gegendruck verursachten starken Geschwindigkeitsabnahme im ablösenahen Gebiet bleibt keine kinetische Energie zum Wirbelbilden verfügbar. Im Extremfall der Ablösung existieren weder Mittel- noch Oberschicht. Die gesamte Grenzschicht wird zur bisherigen Unterschicht reduziert, es wird statt dY nun $d(Y/Y_0)$ geschrieben. Mit $C'_0 = 0$ ergibt sich aus (84)

$$\frac{dC}{d(Y/Y_0)} = \text{Ha}^*_{\text{Abl}} \cdot Y_0 \left(-\frac{Y}{Y_0} + 3 \left(\frac{Y}{Y_0} \right)^3 - 2 \left(\frac{Y}{Y_0} \right)^4 \right) \quad (95)$$

Aus der Integration folgt die Geschwindigkeitsfunktion

$$C = \text{Ha}^*_{\text{Abl}} \cdot Y_0 \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{Y}{Y_0} \right)^2 + \frac{3}{4} \left(\frac{Y}{Y_0} \right)^4 - \frac{2}{5} \left(\frac{Y}{Y_0} \right)^5 \right) \quad (96)$$

Bei $(Y/Y_0) = 1$ soll $C = 1$ gelten, also wird weiter geschrieben

$$(\text{Ha}^*)_{\text{Abl}} = -\frac{20}{3 Y_0} \quad (97)$$

Im Extremfall von Laminarität gilt $Y_0 = 1/2$. Aus (97) folgt $\text{Ha}^*_{\text{Abl}} = -13,33$. Einige Zuordnungen von Y_0 -Werten zur Hagenzahl der Ablösung stehen in der nachfolgenden Tabelle.

Y_0	0,5	0,15	0,10	0,05	0,01
Ha^*_{Abl}	-13,3	-44,4	-66,7	-133,3	-666,7

Die Geschwindigkeitsverteilung $C(Y)$ des Ablöseprofils in der Unterschicht wird mit (96) geschrieben

$$C = \frac{20}{3} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{Y}{Y_0} \right)^2 - \frac{3}{4} \left(\frac{Y}{Y_0} \right)^4 + \frac{2}{5} \left(\frac{Y}{Y_0} \right)^5 \right) \quad (98)$$

Bei Ausdehnen des Profils auf die gesamte Grenzschicht schreibt man

$$C = \frac{20}{3} \left(\frac{1}{2} Y^2 - \frac{3}{4} Y^4 + \frac{2}{5} Y^5 \right) \quad (99)$$

Dieses Geschwindigkeitsprofil ist in [Abbildung 9](#) dargestellt. Die Form des Ablöseprofils bleibt unabhängig von Y_0 und auch unabhängig von der Reynoldszahl, die nach (54) berechnet wird. Wird weiterhin vereinfachend

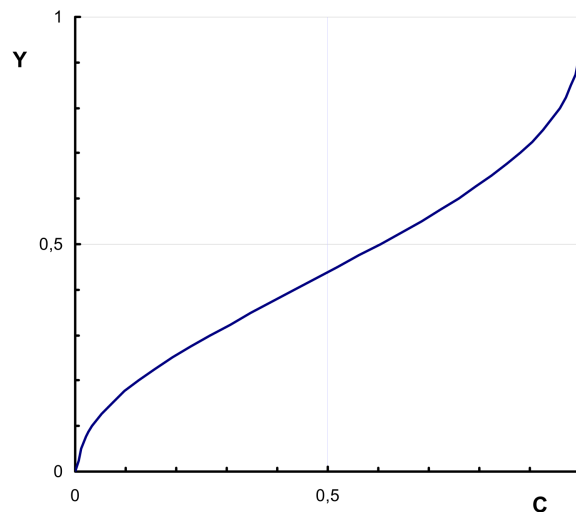


Abb. 9 Geschwindigkeitsprofil für die Ablösung

mit $(c_{\max}/c_{\text{mittel}}) = 8/7$ gearbeitet, erhält man $Re_\delta = 160,86 \cdot C_0'^{4/3}$. Zahlenwerte sind in die dritte Spalte nachfolgender Tabelle eingefügt.

Y_0	C_0'	Re_δ	Ha^*_{Abl}	$\lambda^* = Ha^*_{\text{Abl}}/Re_\delta$
0,01	33,33	$1,73 \cdot 10^4$	-666,7	-0,04
0,05	9,16	$3,1 \cdot 10^3$	-133,3	-0,04
0,10	5,43	$1,54 \cdot 10^3$	-66,7	-0,04
0,15	4,08	$1,05 \cdot 10^3$	-44,4	-0,04

Bemerkenswert bleibt, dass im laminaren Gebiet das Ablösen durch eine spezielle Hagenzahl festgelegt ist, die unabhängig von der Reynoldszahl bleibt. dass Im turbulenten Gebiet jedoch bleibt λ fast gleich groß, und somit unabhängig von der Hagenzahl und von der Reynoldszahl. (Vgl. [Abbildung 25. 10](#) in [\[18\]](#))

Nach Messung [\[14\]](#), liegt der Wert λ^* für Turbulenz, mit leicht fallender Tendenz, zwischen -0,0045 und -0,0043. Bei der Messung wurde als Bezugslänge die Impulsverlustdicke δ^{**} gewählt. Hier aber wurde mit der Grenzschichtdicke δ gearbeitet. Wenn einheitlich die Werte in der letzten Tabellenspalte mit $\delta^{**}/\delta = 0,1$ multipliziert werden, dann liegt der berechnete λ^* -Wert nahe bei dem gemessenen.

Literatur

- [1] Hagen, G. Handbuch der Wasserbaukunst (Band 1 bis 4 Verlag Bornträger; Band 5 bis 8 Verlag Ernst und Korn)
- [2] Blasius, H. Das Ähnlichkeitsgesetz bei Reibungsvorgängen in Flüssigkeiten. Mitteilungen über Forschungsarbeiten auf dem Gebiet des Ingenieurwesens (VDI), 1913.
- [3] Oseen, C. W. Das Turbulenzproblem (Internationaler Kongress für technische Mechanik, Stockholm 1930)
- [4] Hopf, L. Turbulenz bei einem Flusse (Annalen der Physik 1910)
- [5] Hopf, L. Zur Theorie der Turbulenz (Annalen der Physik 1919)
- [6] Prandtl, L. Bericht über Untersuchungen zur ausgebildeten Turbulenz (ZAMM) 1925
- [7] v. Karman, Th. Mechanische Ähnlichkeit und Turbulenz (Internationaler Kongress für technische Mechanik Stockholm 1930)
- [8] Prandtl, L. Neuere Ergebnisse der Turbulenzforschung (VDI – Zeitschrift) 1933
- [9] Prandtl, L. Bericht über neuere Turbulenzforschung (VDI- Verlag 1926)
- [10] Strehle, E. Ebene laminare Wirbelfelder (Maschinenbautechnik)1978
- [11] G. Schindler *Calculating some Details of Turbulent Motion in Plane Channel Flow* ZAMM 74 (1994) 11, 45- 55
- [12] Detsch, F. Über die akustische Wirkung von Wirbelfeldern (Wissenschaftliche Zeitschrift TU Dresden 1978)
- [13] Stiller, J. Ein numerisches Modell für die Grobstruktur- Simulation turbulenter Strömungen (Dissertation TU Dresden 1994)
- [14] Nestler, W. Inkompressible turbulente Grenzschichten mit maximaler Verzögerung MBT 19 (1970)
- [15] Albring, W. Elementarvorgänge fluider Wirbelbewegungen (Akademieverlag Berlin 1981)
- [16] Albring, W. Zur näherungsweise Berechnung von zeitgemittelten Geschwindigkeitsprofilen turbulenter Grenzschichten. (Bericht I 1533 des Instituts für Strömungsmechanik TU Dresden 1997)
- [17] Albring, W. Der turbulente Widerstand einer Kanalströmung kann ohne Abstützen auf Messungen berechnet werden (Bericht des Instituts für Strömungsmechanik TU Dresden 2004)

- [18] Albring, W. Angewandte Strömungslehre, Akademie Verlag Berlin, 1990
- [19] Albring, W. Das Berechnen des turbulenten Hauptgeschwindigkeitsprofils mittels effektiver Zähigkeit (Wissenschaftliche Zeitschrift der TU Dresden (1992))
- [20] Albring, W. Ebene turbulente Dreischichtenprofile für Kanal und Grenzschichtströmungen (Bericht I 1576 Institut für Strömungsmechanik der TU Dresden 2001)
- [21] Albring, W. Ähnlichkeitskennzahlen beim Umschlag und bei Turbulenz In 50 Jahre Grenzschichtforschung, herausgegeben von H. Görtler und W. Tollmien (1954)
- [22] Albring, W. Über die Integrationsmöglichkeit der zeitgemittelten Navier-Stokes- Gleichung; Wissenschaftliche Zeitschrift der TU Dresden 44 1995, Heft 3